



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

## Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

## Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.







PAA

Amalson













ANNALEN  
DER  
PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE.

BAND XLVII.



**ANNALEN**  
**DER**  
**PHYSIK UND CHEMIE.**

HERAUSGEGEBEN UND FORTGEFÜHRT DURCH

**F. A. C. GREY, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF.**

**NEUE FOLGE.**

**BAND XLVII.**

**DER GANZEN FOLGE ZWEIHUNDERT DREIUNDACHTZIGSTER.**

**UNTER MITWIRKUNG**

**DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT IN BERLIN**

**UND INSBESONDERE DES HERREN**

**H. VON HELMHOLTZ**

**HERAUSGEGEBEN VON**

**G. WIEDEMANN.**

**NEBST NEUN FIGURENTAFELN.**

**LEIPZIG, 1892.**

**VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH.**

- 14808 -



# Inhalt.

Neue Folge. Band XLVII.

## Neuntes Heft.

	Seite
I. H. v. Helmholtz. Das Princip der kleinsten Wirkung in der Electrodynamik . . . . .	1
II. W. Negbaur. Ueber die Potentialdifferenzen von Ketten mit trockenen festen Electrolyten . . . . .	27
III. U. Saxén. Ueber die Reciprocität der electrischen Endosmose und der Strömungsströme . . . . .	46
IV. V. Bjerknes. Die Resonanzerscheinung und das Absorptionsvermögen der Metalle für die Energie electrischer Wellen	69
V. L. Zehnder. Zur objectiven Darstellung der Hertz'schen Versuche über Strahlen electrischer Kraft . . . . .	77
VI. D. A. Goldhammer. Die Dispersion der Absorption des Lichtes nach der electrischen Lichttheorie . . . . .	93
VII. L. Holborn und W. Wien. Ueber die Messung hoher Temperaturen . . . . .	107
VIII. G. Melander. Ueber die Ausdehnung der Gase bei niedrigen Drucken. . . . .	135
IX. J. v. Zakrzewski. Ueber das specifische Gewicht und die Schmelzwärme des Eises . . . . .	155
X. K. VonderMühl. Ueber die theoretischen Vorstellungen von Georg Simon Ohm . . . . .	163
XI. M. Toepler. Aenderung des specifischen Volumens des Schwefels mit der Temperatur . . . . .	169

	Seite
XII. K. Wesendonck. Bemerkungen zu der Abhandlung des Hrn. v. Obermeyer „Untersuchungen über die Entladungen der Electricität aus Spitzen etc.“ . . . . .	175

*Geschlossen am 1. September 1892.*

### Zehntes Heft.

I. D. Shea. Zur Brechung und Dispersion des Lichtes durch Metallprismen . . . . .	177
II. H. E. J. G. du Bois und H. Rubens. Ueber ein Brechungs- gesetz für den Eintritt des Lichtes in absorbirende Medien	203
III. B. W. Snow. Ueber das ultraroth Emissionsspectrum der Alkalien . . . . .	208
IV. P. Glan. Zur absoluten Phasenänderung des Lichtes durch Reflexion . . . . .	252
V. F. Koláček. Theorie der Doppelbrechung in inductiver Darstellung . . . . .	258
VI. D. A. Goldhammer. Studien über die electrische Licht- theorie . . . . .	265
VII. R. Lohnstein. Ueber den Durchgang schwacher Ströme durch Electrolytzellen . . . . .	299
VIII. W. Wien. Ueber die Bewegung der Kraftlinien im electro- magnetischen Felde . . . . .	327
IX. D. A. Goldhammer. Zur electrischen Theorie der magneto- optischen Erscheinungen . . . . .	345
X. H. Ebert. Ein automatischer Stromunterbrecher für Accu- mulatoren . . . . .	349
XI. G. Berthold. Zur Geschichte des Leidenforst'schen Phäno- mens; eine literar-historische Notiz . . . . .	350

*Geschlossen am 15. September 1892.*

### Elftes Heft.

I. A. Oberbeck. Ueber das Verhalten des allotropen Silbers gegen den electrischen Strom . . . . .	353
II. W. Hallwachs. Ueber die Brechungsexponenten verdünnter Lösungen . . . . .	380
III. M. Cantor. Ueber Capillaritätsconstanten . . . . .	399





	Seite
X. F. Niemöller. Ueber die Messung der Diffusionscoefficienten von Flüssigkeiten . . . . .	694
XI. G. de Metz. Ueber die absolute Compressibilität des Quecksilbers . . . . .	706
XII. G. Helm. Die Fortpflanzung der Energie durch den Aether	743
XIII. E. Cohn. Zu Hrn. Winkelmann's Abhandlung: „Ueber die Verwendung und Wirkungsweise des Telephons bei electrischen Nullmethoden . . . . .	752
XIV. F. Kohlrausch. Ueber Lösung von Natrium-Silikaten; insbesondere auch über einen Einfluss der Zeit auf deren Constitution . . . . .	756
XV. G. Quincke. Ueber das Verhalten des polarisirten Lichtes bei der Beugung . . . . .	765
XVI. E. Lommel. Sichtbare Darstellung der äquipotentialen Linien in durchströmten Platten; Erklärung des Hall'schen Phänomens	766
Verhandlungen der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. v. 11, no. 6 Sitzung vom 21. October 1892.	
W. Jäger und D. Kreichgauer. Ueber den Temperaturcoefficienten des Quecksilbers . . . . .	767
L. Arons. Ueber einen Quecksilberlichtbogen . . . . .	767
<i>Geschlossen am 15. November 1892.</i>	

## Nachweis zu den Figurentafeln.

- Taf. I. Saxén Fig. 1—3. Holborn u. Wien Fig. 4—9.  
 „ II. Shea Fig. 1 u. 1a. H. E. J. G. du Bois u. H. Rubens Fig. 2.  
     Ebert Fig. 3.  
 „ III—V. B. W. Snow Fig. 1—9.  
 „ VI. Cantor Fig. 1—7. Lehmann Fig. 8—14. Galitzine Fig. 15.  
 „ VII. Kreichgauer u. Jäger A Fig. 1—9. Wesendonck B  
     Fig. 1—23.  
 „ VIII. Birkeland Fig. 1—6. Wien Fig. 7—11. de Metz Fig. 12—17.  
 „ IX. Chr. Wiener.



























von  $\delta u$  nach  $x$ , den von  $\delta v$  nach  $y$ , den von  $\delta w$  nach  $z$  differentiirt:

$$(4b) \quad 0 = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha \cdot \sigma) + \frac{\partial}{\partial y}(\beta \cdot \sigma) + \frac{\partial}{\partial z}(\gamma \sigma),$$

was die bekannte Bedingung dafür ist, dass das Quantum

$$[\sigma \cdot dx \cdot dy \cdot dz]$$

in einem dauernd dieselben substantiellen Punkte umfassende Volumen des Mediums unveränderlich ist.

In einem nicht isolirenden Medium, wo  $u, v, w$  von Null verschieden sein können, ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t} \{\sigma \cdot dx \cdot dy \cdot dz\} = - \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx \cdot dy \cdot dz,$$

die aus der Lehre von den galvanischen Strömen bekannt ist. Gleichung.

Ferner ergeben die Variationen von  $x, y, z$  folgende Gleichungen:

$$(4c) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= +X + \frac{x}{s} - A \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[\alpha \cdot u + \beta \cdot v + \gamma \cdot w] \right. \\ &\quad \left. + \beta \left[ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \gamma \left[ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right] \right\} \\ 0 &= +Y + \frac{y}{s} - A \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}[\alpha \cdot u + \beta \cdot v + \gamma \cdot w] \right. \\ &\quad \left. + \gamma \left[ \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \alpha \left[ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right\} \\ 0 &= +Z + \frac{z}{s} - A \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}[\alpha \cdot u + \beta \cdot v + \gamma \cdot w] \right. \\ &\quad \left. + \alpha \left[ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \beta \left[ \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right] \right\} \end{aligned} \right.$$

Im Falle die äusseren electromotorischen Kräfte  $X=Y=Z=0$  sind, oder von der Form  $\partial \varphi / \partial x, \partial \varphi / \partial y, \partial \varphi / \partial z$ , so gewinnt man aus diesen Gleichungen drei neue, indem man die Differentiationen ausführt, welche nöthig sind, um die Grössen

$$[u \cdot \alpha + v \cdot \beta + w \cdot \gamma]$$

zu eliminiren. Dies ergibt:







Ebenso

$$(5c) \quad \delta \tau = -\frac{\partial}{\partial x} (\xi \cdot \tau) - \frac{\partial}{\partial y} (\eta \cdot \tau) - \frac{\partial}{\partial z} (\zeta \cdot \tau).$$

3. *Producte eines Vectors mit einem Linienelement seiner Richtung.* Wir verlangen, dass für beliebige Werthe der  $Dx$ ,  $Dy$ ,  $Dz$  die Variation:

$$(6) \quad \delta \{ u \cdot Dx + \mathfrak{B} \cdot Dy + \mathfrak{W} \cdot Dz \} = 0.$$

Zu der nach dem Schema (5) gebildeten Aenderung durch Aenderung des Orts, kommen hier noch die Aenderungen der  $Dx$ ,  $Dy$ ,  $Dz$ , welche sind:

$$(6a) \quad \begin{cases} \delta Dx = \frac{\partial \delta x}{\partial x} \cdot Dx + \frac{\partial \delta x}{\partial y} \cdot Dy + \frac{\partial \delta x}{\partial z} \cdot Dz \\ \delta Dy = \frac{\partial \delta y}{\partial x} \cdot Dx + \frac{\partial \delta y}{\partial y} \cdot Dy + \frac{\partial \delta y}{\partial z} \cdot Dz \\ \delta Dz = \frac{\partial \delta z}{\partial x} \cdot Dx + \frac{\partial \delta z}{\partial y} \cdot Dy + \frac{\partial \delta z}{\partial z} \cdot Dz. \end{cases}$$

Wenn man diese Werthe in Gleichung (6) einsetzt und berücksichtigt, dass die dann entstehende Gleichung für beliebige Verhältnisse der  $Dx$ ,  $Dy$ ,  $Dz$  gelten soll, erhält man:

$$\begin{aligned} \delta u &= u \cdot \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \mathfrak{B} \cdot \frac{\partial \delta y}{\partial x} + \mathfrak{W} \cdot \frac{\partial \delta z}{\partial x} \\ &+ \delta x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \delta y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \delta z \cdot \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned}$$

oder <sup>1)</sup>

$$(6b) \quad \begin{cases} -\delta u = \frac{\partial}{\partial x} [u \cdot \delta \xi + \mathfrak{B} \cdot \delta \eta + \mathfrak{W} \cdot \delta \zeta] + \delta y \left[ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} \right] \\ \quad \quad \quad + \delta z \left[ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} \right] \\ -\delta \mathfrak{B} = \frac{\partial}{\partial y} [u \cdot \delta \xi + \mathfrak{B} \cdot \delta \eta + \mathfrak{W} \cdot \delta \zeta] + \delta z \left[ \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y} \right] \\ \quad \quad \quad + \delta x \left[ \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] \\ -\delta \mathfrak{W} = \frac{\partial}{\partial z} [u \cdot \delta \xi + \mathfrak{B} \cdot \delta \eta + \mathfrak{W} \cdot \delta \zeta] + \delta x \left[ \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right] \\ \quad \quad \quad + \delta y \left[ \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z} \right] \end{cases}$$

1) Dieses Schema ist von mir schon in Borchardt's Journal für r. u. a. Mathematik gegeben 78. p. 307—309.



$\xi, \eta, \zeta$  soll für beliebige Werthe der  $Dx, Dy, Dz$  constant bleiben:

$$(7) \quad 0 = \delta \{ \mathfrak{X} \cdot Dy \cdot Dz + \mathfrak{Y} \cdot Dz \cdot Dx + \mathfrak{Z} \cdot Dx \cdot Dy \}.$$

Wieder treten die Variationen wegen Aenderung des Ortes nach dem Schema der Gleichung (5) ein, und dazu kommen die Variationen des

$$\delta [Dy \cdot Dz] = Dy \cdot \delta Dz + Dz \cdot \delta Dy,$$

worin die Werthe der Variationen  $\delta Dy, \delta Dz$  wieder aus den Gleichungen (6a) zu nehmen sind, und wiederum die aus (7) entstehende Gleichung für alle Verhältnisse der  $Dx, Dy, Dz$  gelten muss:

$$\begin{aligned} -\delta \mathfrak{X} = & \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} \cdot \delta \xi + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} \cdot \delta \eta + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} \cdot \delta \zeta + \left( 1 + \frac{\partial \delta \eta}{\partial y} + \frac{\partial \delta \zeta}{\partial z} \right) \cdot \mathfrak{X} \\ & - \frac{\partial \delta \xi}{\partial y} \cdot \mathfrak{Y} - \frac{\partial \delta \xi}{\partial z} \cdot \mathfrak{Z} \end{aligned}$$

oder

$$(7a) \quad \left\{ \begin{aligned} -\delta \mathfrak{X} &= \delta \xi \left[ \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial y} [\mathfrak{X} \cdot \delta \eta - \mathfrak{Y} \cdot \delta \xi] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} [\mathfrak{X} \cdot \delta \zeta - \mathfrak{Z} \cdot \delta \xi] \\ -\delta \mathfrak{Y} &= \delta \eta \left[ \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} [\mathfrak{Y} \cdot \delta \zeta - \mathfrak{Z} \cdot \delta \eta] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} [\mathfrak{Y} \cdot \delta \xi - \mathfrak{X} \cdot \delta \eta] \\ -\delta \mathfrak{Z} &= \delta \zeta \left[ \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial x} [\mathfrak{Z} \cdot \delta \xi - \mathfrak{X} \cdot \delta \zeta] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} [\mathfrak{Z} \cdot \delta \eta - \mathfrak{Y} \cdot \delta \zeta]. \end{aligned} \right.$$

Betrachtet man wieder die Variationen als in der Zeit continuirlich eintretende Veränderungen, so erhalten wir die Gleichungen (4a) in ihrer ursprünglichen Form, die sie bei Maxwell haben:

$$0 = Au + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mathfrak{M}}{\mu} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mathfrak{M}}{\mu} \right) + A \cdot \left[ \frac{d\mathfrak{X}}{dt} \right],$$

u. s. w.

worin





Es ist also zu setzen, da

$$\delta \rho = - \left( \frac{\partial}{\partial x} (\rho \delta \xi) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \delta \eta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \delta \zeta) \right)$$

$$(8a) \left\{ \begin{aligned} \delta \alpha &= \frac{\partial \delta \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} [\beta \delta \xi - \alpha \delta \eta] + \frac{\partial}{\partial z} [\gamma \delta \xi - \alpha \delta \zeta] \\ &\quad - \delta \xi \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right] + \alpha \left[ \frac{\partial \delta \xi}{\partial x} + \frac{\partial \delta \eta}{\partial y} + \frac{\partial \delta \zeta}{\partial z} \right]. \end{aligned} \right.$$

Wenn wir setzen

$$(8b) \left\{ \begin{aligned} \delta \alpha_0 &= - \delta \xi \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right] - \frac{\partial}{\partial y} [\alpha \delta \eta - \beta \delta \xi] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial z} [\alpha \delta \zeta - \gamma \delta \xi], \end{aligned} \right.$$

so ist das vollständige

$$(8c) \quad \delta \alpha = \delta \alpha_0 + \frac{\partial \delta \xi}{\partial t} + \alpha \left[ \frac{\partial \delta \xi}{\partial x} + \frac{\partial \delta \eta}{\partial y} + \frac{\partial \delta \zeta}{\partial z} \right].$$

Das  $\delta \alpha_0$  hat vollkommen die Form der Variation, wie die der electrischen und magnetischen Momente. Diese Bemerkung macht es möglich, die sehr verwickelte Berechnung der Variationen erheblich übersichtlicher und leichter zu machen.<sup>1)</sup>

6. *Differentialquotienten nach der Zeit.* Da die Zeit keiner Variation unterworfen wird, so ist für sie einfach zu setzen:

$$\delta \left[ \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} [\delta \mathfrak{X}].$$

Es sind also dabei auch die  $\xi, \eta, \zeta$  nach der Zeit zu differenzieren, da während des Zeittheilchens  $dt$ , für welches der Differentialquotient genommen wird, die Verschiebungen sich ebenfalls ändern.

*Die Ponderomotorischen Kräfte.* Wir bezeichnen, wie oben, ihre Componenten mit  $\Xi, \Upsilon, Z$ . Ihre Arbeit geschieht auf Kosten von dem inneren Arbeitsvorrath des Systems, wenn Bewegungen in Richtung der Kräfte vor sich gehen. Wir erstrecken also die Variation nach den Coordinaten auf die Grösse

$$0 = \delta \{ \Psi + \iiint [\Xi \cdot \xi + \Upsilon \cdot \eta + Z \cdot \zeta] dx \cdot dy \cdot dz \}$$

---

1) Ich bemerke noch, dass es mittels der hier entwickelten Formen der Variationen gelingt Euler's Gleichungen der Aërodynamik aus Hamilton's Minimalsatz zu entwickeln, was, soviel ich weiss, noch nicht gelungen war, und als ein passendes Beispiel zur Erprobung der hier eingeschlagenen Methoden dienen mag.



deren Variation nur den mit  $\partial \delta \xi / \partial t$ ,  $\partial \delta \eta / \partial t$  und  $\partial \delta \zeta / \partial t$  bezeichneten Theil einsetzt.

Von den Variationen  $\delta \alpha$ ,  $\delta \beta$  und  $\delta \gamma$  sind dann zunächst die oben mit  $\delta \alpha_0$ ,  $\delta \beta_0$  und  $\delta \gamma_0$  bezeichneten Glieder zu berücksichtigen, die, wie schon oben bemerkt, vollkommen gleiche Form haben mit  $\delta \mathfrak{X}$ ,  $\delta \mathfrak{Y}$ ,  $\delta \mathfrak{Z}$  und  $\delta(\mathfrak{L} + \mathfrak{I})$ ,  $\delta(\mathfrak{M} + m)$ ,  $\delta(\mathfrak{N} + n)$ . Dadurch wird es leicht die Variationen der Determinante

$$\text{Det.} \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ \mathfrak{X} & \mathfrak{Y} & \mathfrak{Z} \\ (\mathfrak{L} + \mathfrak{I}) & (\mathfrak{M} + m) & (\mathfrak{N} + n) \end{vmatrix}$$

auszuführen. Man erhält für die Variation nach  $\xi$  den Werth

$$\delta |\text{Det}| = \delta \xi \cdot \frac{\partial}{\partial x} |\text{Det}|;$$

und auch dieser hebt sich fort, wenn man die letzten Glieder der Variation  $\delta \alpha$  in (8c) u. s. w. berücksichtigt, welche das Product ergeben:

$$|\text{Det}| \cdot \left( \frac{\partial \delta \xi}{\partial x} + \frac{\partial \delta \eta}{\partial y} + \frac{\partial \delta \zeta}{\partial z} \right),$$

woraus bei partieller Integration für die Variation nach  $\xi$  der Werth folgt

$$- \frac{\partial}{\partial x} |\text{Det}|.$$

Ganz ebenso heben sich schliesslich die Glieder des über

$$[U \alpha \sigma + V \cdot \beta \sigma + W \gamma \cdot \sigma]$$

genommenen Integrals fort, wenn man die  $U$ ,  $V$ ,  $W$ ,  $\sigma$  nach den oben gegebenen Regeln variirt und für die  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  nur die allein noch übrig bleibenden Variationen von

$$\left( \delta \alpha - \frac{\partial \delta \xi}{\partial t} \right), \left( \delta \beta - \frac{\partial \delta \eta}{\partial t} \right), \left( \delta \gamma - \frac{\partial \delta \zeta}{\partial t} \right)$$

berücksichtigt.

Es geht also schliesslich aus dieser Untersuchung hervor, dass die ponderomotorischen Kräfte sich in der That aus unserem Minimalprincip vollkommen übereinstimmend mit Maxwell's Theorie ergeben.



so ergaben die Gleichungen 4a:

$$(10b) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\mathfrak{N}}{\mu} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\mathfrak{M}}{\mu} \right] = A \cdot u \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\mathfrak{L}}{\mu} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\mathfrak{N}}{\mu} \right] = A \cdot v \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\mathfrak{M}}{\mu} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\mathfrak{L}}{\mu} \right] = A \cdot w \end{cases}$$

In Theilen des Raumes, wo  $\mu$  constant ist, und kein permanenter Magnetismus vorkommt, also

$$l = m = n = o$$

ergibt sich durch Einführung der Werthe aus (2) und (2e)

$$- \Delta \mathfrak{U} + \Delta \frac{\partial \psi}{\partial x} = A \cdot \mu \cdot u$$

$$- \Delta \mathfrak{V} + \Delta \frac{\partial \psi}{\partial y} = A \cdot \mu \cdot v$$

$$- \Delta \mathfrak{W} + \Delta \frac{\partial \psi}{\partial z} = A \cdot \mu \cdot w$$

Also sind die Grössen

$$\left( \mathfrak{U} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \quad \left( \mathfrak{V} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \quad \left( \mathfrak{W} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)$$

Potentialfunctionen von den Dichtigkeiten  $[-A \cdot \mu \cdot u / 4\pi]$ ,  $[-A \cdot \mu \cdot v / 4\pi]$ ,  $[-A \cdot \mu \cdot w / 4\pi]$  beziehlich, nebst solchen von etwa dazu kommenden äusseren Massen. Es sind die  $\mathfrak{U}$ ,  $\mathfrak{V}$ ,  $\mathfrak{W}$  also die sogenannten Vectorpotentiale der Componenten der Stromdichtigkeit.

Wenn in umfassenderen Räumen das  $\mu$  nicht constant und der permanente Magnetismus nicht gleich Null ist, wird die Bildung dieser Functionen verwickelter, wie es durch die obigen Differentialgleichungen angezeigt ist.

Betrachten wir also weiter die Grössen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  als Geschwindigkeiten, und die  $\mathfrak{U}$ ,  $\mathfrak{V}$ ,  $\mathfrak{W}$  als Potentiale von Geschwindigkeiten, so würde die Form des Werthes der lebendigen Kraft nur anzeigen, dass dieselbe nicht nur von den Einzelgeschwindigkeiten in den einzelnen Volumelementen abhängt, sondern dadurch vergrössert wird, dass in den benachbarten Volumelementen gleichgerichtete Geschwindigkeiten liegen.

Formen wie die der Gleichung 9b kommen für die lebendige Kraft in der Hydrodynamik vor. Dort müssen aber die



$$P_e = \frac{d s_e}{d t}$$

und daher

$$P_e \cdot q_e \cdot d t = q_e \cdot d s_e = d Q_e,$$

wo  $d Q_e$  die durch die Aenderung bedingte Abgabe von Arbeit ist. Diese kann also auch in der letzteren Form dargestellt werden, wie eine Kraft  $q_e$ , die auf die Aenderung des  $s_e$  hinwirkt. Dies ist analog dem Umstande, dass in unseren electrodynamischen Gleichungen die galvanischen Stromcomponenten als Kräfte vorkommen, die die Vectorpotentiale  $\mathfrak{U}$ ,  $\mathfrak{V}$ ,  $\mathfrak{W}$  zu ändern streben. Diese letzteren entsprechen in der That cyklischen magnetischen Bewegungen.

Die galvanischen Ströme in Leitern treten in der hier gegebenen Darstellung zunächst auf als Processe, welche rings um sich herum circulare magnetische Kräfte bedingen, wie die  $d \mathfrak{X} / d t$ ; erst in zweiter Linie kommt daneben in Betracht, dass sie nach Ohm's Gesetz die electrischen Momente zerstören oder nicht anwachsen lassen. Man wird dadurch den Widerspruch los, dass das Anwachsen von  $\mathfrak{X}$ , was doch im constanten Strome nicht mehr stattfindet, Ursache der magnetischen Wirkungen in der Umgebung sein soll.

---

Abweichend von den bekannten Formen des Problems erscheint es hier, dass Grössen  $\mathfrak{U}$ ,  $\mathfrak{V}$ ,  $\mathfrak{W}$ , welche wir schliesslich als Bewegungsmomente charakterisiren, vorher als unabhängige Variable bei der Variation behandelt worden sind. Ich verweise in dieser Beziehung auf die von mir in *Journal f. Math.* Bd. 100. p. 151 behandelte Form, wo die Geschwindigkeiten  $q_a$  ebenfalls als unabhängige Variable behandelt, und die Bedeutung dieser Grössen durch die Variation selbst erst gefunden ist. Ich behalte mir vor, in einer späteren Mittheilung solche Fälle weiter zu besprechen, wo Grössen vorkommen, von denen man nicht weiss, ob sie Zustände oder Aenderungsgeschwindigkeiten von solchen sind.

---









meter<sup>1)</sup> verwendet, welches sich durch seine kleine Capacität auszeichnet. Das Goldblatt war durch ein Aluminiumblatt ersetzt.

Die Proportionalität des Ausschlages des Aluminiumblattes mit der electromotorischen Kraft, muss im allgemeinen einer jedesmaligen Prüfung unterzogen werden, sie gilt bei kleinem Plattenabstand nur für sehr kleine Ausschläge. Um diese Controlmessungen zu vermeiden, habe ich einen verhält-

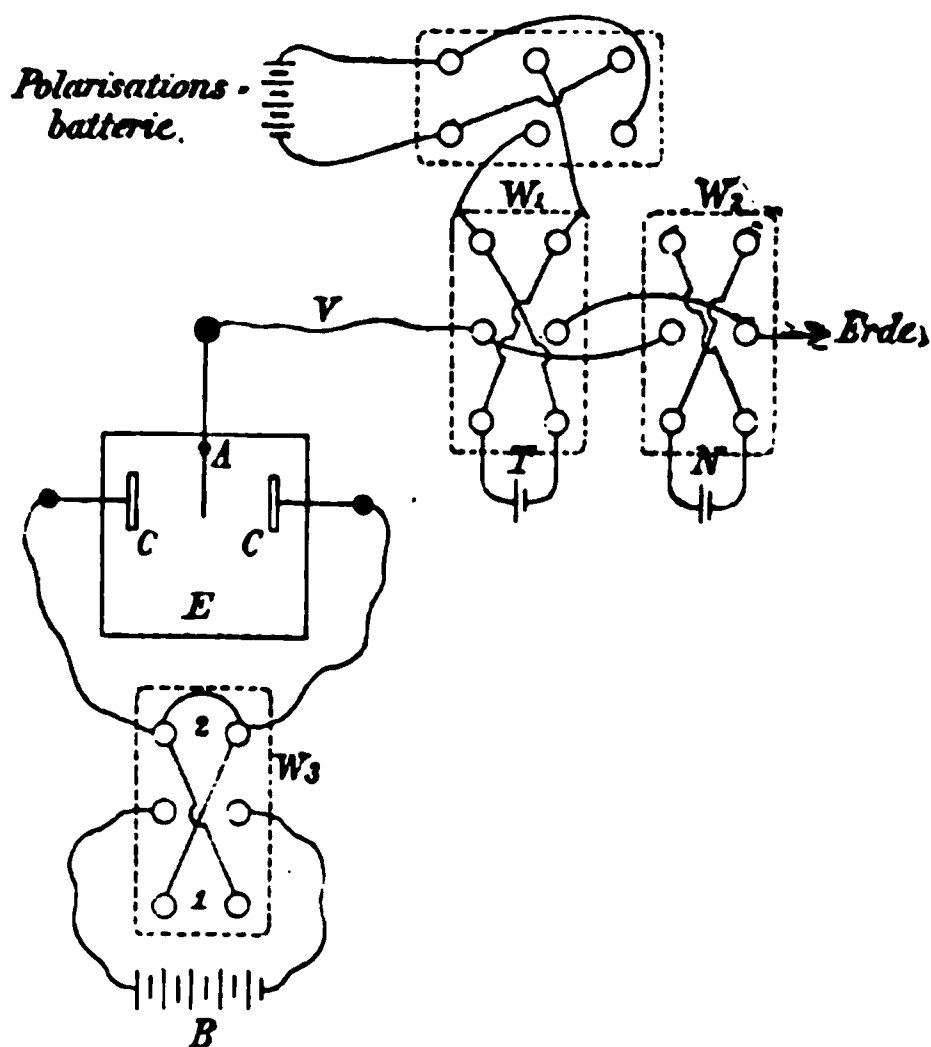


Fig. 2.

nissmässig grossen Plattenabstand gewählt, musste nun aber die Platten, um einen genügend grossen Ausschlag zu erhalten, auf ein sehr hohes Potential laden. Zur Ladung diente eine Säule von 100 Latimer-Clark-Elementen in der von Hrn. F. Braun<sup>2)</sup> angegebenen Form und von 144 Cu-Wasser-Zn Elementen, die in der Weise geschaltet waren, dass zunächst die constante

Clark-Batterie benutzt wurde und dann vor jeden Pol derselben ca. 70 Wasserelemente vorgeschaltet waren. Durch Ein- oder Ausschalten einiger Wasserelemente konnte die electromotorische Kraft regulirt werden. Als Vergleichsinstrumente dienten für kleine Potentialdifferenzen die von mir früher beschriebenen Concentrationselemente<sup>3)</sup>, für grössere ein Latimer-Clark-Normalelement.<sup>4)</sup> Letzteres ergab in der

1) Blochmann, Wied. Ann. 37. p. 564. 1889.

2) F. Braun, Wied. Ann. 31. p. 870. 1887.

3) W. Negbaur, Wied. Ann. 44. p. 767. 1891.

4) W. Negbaur, Wied. Ann. 44. p. 765. 1891.



7. Minute	45,8	60,2	45,9	60,2
10. „	45,9	60,2	45,8	60,2
20. „	45,2	59,0	45,2	59,2
nach 1 Stunde	45,0	59,0	45,1	59,0

Aber auch bei einer grossen Zahl nicht umkehrbarer Combinationen blieben die Ausschläge constant, woraus sich schliessen lässt, dass diese Ketten bei der geringen Stromstärke ohne merkliche Polarisation leiten.

Beispiel:

$\text{Pt} | \text{Pb J}_2 (\text{amorph.}) | \text{Ag} . \text{E. M. K.} = 0,400 \text{ Volt.}$

1. Minute	54,5	45,0	54,3	45,1
2. „	54,6	45,2	54,5	45,0
10. „	54,6	45,1	54,6	45,0
nach 1 Stunde	54,4	45,0	54,6	45,0

Bei einigen wenigen Ketten dauerte die Ladung sehr lange. Der Ausschlag wurde erst nach längerer Zeit constant; beim Commutiren bewegte sich das Aluminiumblatt nicht ruckweise, sondern sehr langsam.

## 2. Genauigkeit der Methode.

Weiter habe ich die electromotorischen Kräfte verglichen bei Anwendung verschiedener Stücke desselben Salzes oder derselben Metallelektroden.

Es ergaben sich bei der Messung der Kette  $\text{Pt} | \text{Pb Cl}_2 | \text{Pb}$  mit drei verschiedenen (auch verschieden dicken) Salzstücken die electromotorischen Kräfte: 0,608 0,576 0,582 Volt. Bei Verwendung anderer Electroden aus demselben Metall: 0,562 0,611 0,582 Volt. Die Kette  $\text{Pb} | \text{Pb Cl}_2 | \text{Ag Cl} | \text{Ag}$  ergab die electromotorische Kraft = 0,520, dieselbe Combination mit anderen Elektroden und Salzstücken die electromotorische Kraft = 0,511 Volt.

Durch besonders grosse Unabhängigkeit von der Art ihrer Zusammenstellung zeichneten sich folgende Ketten aus:

$\text{Pb}   \text{Pb Cl}_2   \text{Ag Cl}   \text{Ag}$	. .	E. M. K. = 0,520 Volt
$\text{Pt}   \text{Pb J}_2 (\text{amorph.})   \text{Ag}$	. .	E. M. K. = 0,400 „
$\text{Ag}   \text{Ag Br}   \text{Pb}$	. . . . .	E. M. K. = 0,022 „

Allgemein ergibt sich, dass sich die electromotorischen Kräfte umkehrbarer Ketten nach dieser Methode im Mittel auf 2 Proc. genau, diejenigen der nicht umkehrbaren auf 5 Proc. genau messen lassen.



rungen der Leitfähigkeit hervor, welche an einigen Salzen bei molekularen Umlagerungen nachgewiesen worden sind. Es ist somit nicht ausgeschlossen, dass die Structur des Electolyten auch die electromotorische Kraft einer Kette beeinflusst. Zur Prüfung dieser Frage kann man in verschiedener Weise vorgehen:

1. Krystallinische und amorphe Modificationen. Man kann die Bleiverbindungen, welche bei gewöhnlicher Temperatur in krystallinischer und amorpher Form vorkommen, direct mit denselben Metallen in Ketten messen.

Die Resultate sind nachstehend verzeichnet:

Pt	Pb Br <sub>2</sub> krystall	Ag:	E. M. K. = 0,402
Pt	Pb Br <sub>2</sub> amorph	Ag:	„ = 0,400
Pt	Pb J <sub>2</sub> krystall	Ag:	„ = 0,392
Pt	Pb J <sub>2</sub> amorph	Ag:	„ = 0,409
Pt	Pb Cl <sub>2</sub> krystall	Ag:	„ = 0,381
Pt	Pb Cl <sub>2</sub> amorph	Ag:	„ = 0,401

Es ist durch diese Versuche ein Einfluss nicht sicher zu constatiren. Zu bemerken ist, dass die amorphen Modificationen weit constantere Resultate ergeben.

2. Farbenwechsel des Chlorbleis. Derselbe tritt bei ca. 200° ein und ist durch eine Structuränderung hervorgerufen.

Es ergibt sich aber aus den auf Seite 9 mitgetheilten Zahlen, dass die electromotorische Kraft nicht merklich beeinflusst ist.

3. Umwandlung des Hg J<sub>2</sub> bei 150°:

Pt | Hg J<sub>2</sub> | Ag . . . E. M. K. = 0,411.

Temp.	52°	78°	100°	130°	140°	170°	200°
E. M. K.	0,415	0,410	0,398	0,400	0,400	0,391	0,418

4. Jodsilber geht bei 145° aus dem amorphen in den krystallinischen Zustand über.

Pt | Hg Br<sub>2</sub> | Ag J | Ag . . . E. M. K. = 0,129.

Temp.	54°	108°	132°	148°	173°	200°
E. M. K.	0,124	0,123	0,141	0,146	0,130	0,140

Die Differenzen der electromotorischen Kraft liegen innerhalb der Grenzen der Genauigkeit der Methode.





durch einen Theil der inconstanten Elemente den Strom einer ausserhalb gelegenen Stromquelle geschickt und den Werth der electromotorischen Kraft bei maximaler Polarisation bestimmt. Die meisten Ketten ergaben einen von der ursprünglichen electromotorischen Kraft sehr verschiedenen Werth, bei einigen war die Differenz gering. Die in den folgenden Tabellen mitgetheilten Zahlen bedeuten die bei Zimmertemperatur gemessene electromotorische Kraft der Ketten in Volt, die mit  $E_{\max}$  bezeichneten Werthe sind die Ergebnisse der Messungen bei maximaler Polarisation durch eine äussere Stromquelle. Das mit + Electricität sich ladende Metall steht stets voran.

#### A. Constante Ketten.

a	{	Ag   Ag Cl   Pb Cl <sub>2</sub>   Pb :	0,513	0,495	0,523	0,527
		Ag   Ag J   Pb J <sub>2</sub>   Pb :	0,242	0,198	0,203	0,212
		Ag   Ag Br   Pb Br <sub>2</sub>   Pb :	0,421	0,430	0,399	0,423

Die zwei ersten senkrechten Zahlenreihen gelten für crystallinische Bleisalze, die beiden letzten für amorphe Modificationen.

Ag | Ag J (geschmolzen, kalt) | Pb J<sub>2</sub> (amorph) | Pb : 0,184 0,180.

b	{	Hg   Hg Cl <sub>2</sub>   Ag Cl   Ag :	0,06—0,09	
		Hg   Hg Br <sub>2</sub>   Ag Br   Ag :	0,07—0,10	
		Hg   Hg J <sub>2</sub>   Ag J   Ag :	ca. 0,170.	
c	{	Hg   Hg <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub>   Ag Cl   Ag :	> 0,02	—
		Hg   Hg <sub>2</sub> Br <sub>2</sub>   Ag Br   Ag :	ca. 0,08	—
		Hg   Hg <sub>2</sub> J <sub>2</sub>   Ag J   Ag :	0,111	0,112.

Ersetzt man in der zweiten Combination unter c das trockene feste Ag Br durch geschmolzenes kaltes Ag Br, so ändert sich die electromotorische Kraft nicht.

In dieser Form ist die Kette von Hrn. Braun<sup>1)</sup> gemessen worden, die electromotorische Kraft war = 7,4 bis 9,3 (wenn 1 Daniell = 100), somit im Mittel = 0,092 Volt.

d	{	Hg   Hg Cl <sub>2</sub>   Pb Cl <sub>2</sub>   Pb :	0,520	0,500
		Hg   Hg Br <sub>2</sub>   Pb Br <sub>2</sub>   Pb :	0,534	0,519
		Hg   Hg J <sub>2</sub>   Pb J <sub>2</sub>   Pb :	0,309	0,326.

Die erste Combination (mit Hg Cl<sub>2</sub>) leitet sehr schlecht. Die Ladung des Aluminiumblattes dauert lange, die Werthe sind darum unsicher.

1) F. Braun, Wied. Ann. 17. p. 630. 1882.



## e) Bromsilber.

Pt   Ag Br   Zn :	0,193	—	—	$E_{\max.} : 1,26$
Pt   Ag Br   Ag :	0,064	—	—	—
Ag   Ag Br   Zn :	0,189	(unsicher)	—	$E_{\max.} : 0,300$
Ag   Ag Br   Pb :	0,019	0,020	0,0220	$E_{\max.} : 0,419$

## f) Jodsilber.

Pt   Ag J   Zn :	0,196	0,210	$E_{\max.} : 0,810$
Pt   Ag J   Ag :	0,071	(unsicher)	$E_{\max.} : 0,676$
Ag   Ag J   Zn :	0,149	(unsicher)	$E_{\max.} : 0,07$
Ag   Ag J   Pb :	0,0235	—	—

## g) Quecksilberchlorid.

Pt   Hg Cl <sub>2</sub>   Zn :	0,09	} (unsicher).
Pt   Hg Cl <sub>2</sub>   Ag :	0,009	
Hg   Hg Cl <sub>2</sub>   Zn :	0,08	

## h) Quecksilberbromid.

Pt   Hg Br <sub>2</sub>   Zn :	1,091	$E_{\max.} : 1,26$
Ag   Hg Br <sub>2</sub>   Pb :	0,238	$E_{\max.} : 0,520$

## i) Quecksilberjodid.

Pt   Hg J <sub>2</sub>   Zn :	0,829	$E_{\max.} : 1,452$
Ag   Hg J <sub>2</sub>   Pb :	0,07 (!)	$E_{\max.} : 0,368$

## k) Schwefelverbindungen.

Pt   Zn S   Zn :	0,812	0,716
Pt   Cu <sub>2</sub> S   Zn :	0,01	0,014
Pt   Tl S   Zn :	0,019	0,018
Pt   Sb <sub>2</sub> S <sub>3</sub>   Zn :	0,402	—

## l) Verschiedene Ketten.

Pt   Cu Cl <sub>2</sub>   Cu :	0,065
Pt   Cu <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub>   Zn :	0,725
Pt   Zn O   Zn :	0,196
Pt   Bors. Cobalt   Zn :	0,385
Pt   Ba Cr O <sub>4</sub>   Zn :	0,852

## Discussion.

*Allgemeines.* Im Jahre 1847 machte Hr. von Helmholtz<sup>1)</sup> auf einen Zusammenhang der electromotorischen Kraft galvanischer Ketten mit der algebraischen Summe der Wärmetönungen, welche den chemischen Umsetzungen in der Kette entsprechen, aufmerksam.

Sir W. Thomson<sup>2)</sup> leitete später aus dem Grundsatz der

1) H. v. Helmholtz, Wissensch. Abh. 1. p. 50. 1882.

2) W. Thomson, Phil. Mag. (4) 2. p. 429 u. 551. 1851.



So ist z. B. der Mittelwerth der beobachteten electromotorischen Kraft der Kette  $\text{Pb} | \text{Pb J}_2 | \text{Zn} = 0,201$  Volt. Sie berechnet sich unter Zugrundelegung der später angegebenen Wärmetönungen zu 0,202 Volt und ist nach Seite 13 nicht polarisierbar.

Im Folgenden will ich unter a) 1. für eine Reihe von umkehrbaren Ketten, bei welchen keine secundären Processe auftraten, die nach Thomson ermittelte electromotorische Kraft mit den experimentell bestimmten vergleichen.

#### a. Constante Ketten.

##### 1. Berechnung nach Thomson:

Die in der Kette  $\text{M}_1 | \text{M}_1 \text{ R} | \text{M}_2 \text{ R} | \text{M}_2$  auftretenden Wärmetönungen sind:

$$+ (\text{M}_1, \text{M}_1) - (\text{M}_1, \text{R}) + (\text{M}_2, \text{R}) - (\text{M}_2, \text{R}) + (\text{M}_2, \text{R}) - (\text{M}_2, \text{M}_2).$$

Die Wärmen, welche dem Verbinden von den Metallen  $\text{M}_1$  und dem Lösen von den Metallen  $\text{M}_2$  entsprechen, sind unbekannt (Vergleiche den letzten Abschnitt dieser Abhandlung). Zur Lösung der Aufgabe setzen wir in üblicher Weise  $(\text{M}_1, \text{M}_1) - (\text{M}_2, \text{M}_2) = 0$ . Alsdann lautet die Gleichung für die electromotorische Kraft der Kette:

$C [(\text{M}_2, \text{R}) - (\text{M}_1, \text{R})] = E$ , wo  $C$  die Constante  $43 \cdot 10^{-6}$  bedeutet. Folgende von J. Thomson ermittelten Wärmetönungen werden zur Berechnung herangezogen:

Ag Cl	29,380	Hg Cl <sub>2</sub>	63,160
Ag Br	22,700	Hg Br <sub>2</sub>	50,550
Ag J	13,800	Hg J <sub>2</sub>	34,310
Pb Cl <sub>2</sub>	82,770	Hg <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub>	82,550
Pb Br <sub>2</sub>	64,450	Hg <sub>2</sub> Br <sub>2</sub>	68,290
Pb J <sub>2</sub>	39,800	Hg <sub>2</sub> J <sub>2</sub>	48,440
Zn J <sub>2</sub>	49,230		

Tabelle der beobachteten und berechneten electromotorischen Kraft:

	Ketten:	berechnet:	beobachtet:
a	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ag}   \text{Ag Cl}   \text{Pb Cl}_2   \text{Pb}: \\ \text{Ag}   \text{Ag Br}   \text{Pb Br}_2   \text{Pb}: \\ \text{Ag}   \text{Ag J}   \text{Pb J}_2   \text{Pb}: \end{array} \right.$	$+ 0,516$ $+ 0,410$ $+ 0,262$	$+ 0,517$ $+ 0,418$ $+ 0,214$
b	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hg}   \text{Hg Cl}_2   \text{Ag Cl}   \text{Ag}: \\ \text{Hg}   \text{Hg Br}_2   \text{Ag Br}   \text{Ag}: \\ \text{Hg}   \text{Hg J}_2   \text{Ag J}   \text{Ag}: \end{array} \right.$	$- 0,095$ $- 0,110$ $- 0,144$	$+ 0,075$ $+ 0,085$ $+ 0,170$





Die beobachteten Werthe dieser Ketten sind sehr zuverlässig. Nach Thomsons Theorie müssten die Electrolyte dem Spannungsgesetz gehorchen, da die Wärmetönungen, welche bei der Bildung und Zerlegung der zwischengeschalteten Salze auftreten, aus den Gleichungen herausfallen.

#### b. Inconstante Ketten.

*Allgemeines:* Während die electromotorischen Kräfte der constanten Ketten unabhängig von der Zeit sind, ändern sich diejenigen der inconstanten Ketten langsam mit der Zeit, und zwar nahmen sie meist ab, nur in wenigen Fällen wuchsen sie an. Die Ursache dieser Veränderung der electromotorischen Kraft ist die Bildung der Uebergangsglieder, die je nach der Art der zusammengestellten Ketten verschieden schnell vor sich geht. Die Untersuchungen der Hrn. Oberbeck und Edler<sup>1)</sup> zeigen, dass bei Anwesenheit eines Lösungsmittels die Bildung der Zwischenschichten so schnell vor sich geht, dass es überhaupt nicht möglich ist den ursprünglichen Werth der electromotorischen Kraft zweier Metalle gegen einen gelösten Electrolyten zu messen. Die genannten Herrn kamen zu folgendem Resultat: „Die inconstanten Ketten sind auf die constanten Ketten durch die Annahme molecularer Schichten und von Lösung der Electrodenmetalle zurückzuführen. Letztere sind als verdünnte Lösungen aufzufassen. Ihre Concentration hängt von mancherlei Umständen ab, welche noch durch weitere Versuche festgestellt werden müssen.“ Im Gegensatz hierzu ist es bei den meisten Trockenelementen möglich den wirklichen Werth der Potentialdifferenz zweier Metalle gegen einen Electrolyten zu ermitteln, es kommt jedoch den gemessenen Anfangswerthen der electromotorischen Kraft nicht die Sicherheit zu, wie den Beobachtungen an umkehrbaren Ketten.

Beschleunigt man das Zustandekommen der Zwischenglieder, indem man den Strom einer ausserhalb gelegenen Stromquelle durch das Element schickt, so zeigt sich Folgendes: Ein Strom, dessen Richtung im Sinne einer Ladung das Element durch-

1) A. Oberbeck u. J. Edler, Wied. Ann. 42. p. 209. 1891.





Aus der durch die Messungen bestätigten Relation

$$M_1 | M_4 R | M_2 + M_2 | M_4 R | M_3 = M_1 | M_4 R | M_3$$

lässt sich ein interessantes thermochemisches Resultat ableiten. Schreibt man die sämtlichen Wärmetönungen hin, welche den in der obigen Gleichung enthaltenen Processen entsprechen, so sind dieselben

$$\begin{aligned} &+ (M_4, M_4) - (M_4, R) + (M_2, R) - (M_2, M_2) \\ &+ (M_4, M_4) - (M_4, R) + (M_3, R) - (M_3, M_3) \\ &= (M_4, M_4) - (M_4, R) + (M_3, R) - (M_3, M_3). \end{aligned}$$

daher:

$$(M_2, R) - (M_4, R) = (M_2, M_2) - (M_4, M_4).$$

Thut man dasselbe für eine analoge Relation, in der nur an Stelle des Radicales R ein Radical  $R^1$  auftritt, also für

$$M_1 | M_4 R^1 | M_2 + M_2 | M_4 R^1 | M_3 = M_1 | M_4 R^1 | M_3$$

und vergleicht die resultirenden thermochemischen Gleichungen, so folgt:

$$(M_2, R) - (M_4, R) = (M_2, R^1) - (M_4, R^1),$$

d. h. der Unterschied der Wärmemengen, welche nöthig sind, um ein Radical R von einem Metall  $M_2$  und einem Metall  $M_4$  zu trennen, ist gerade so gross, wie der entsprechende Unterschied der Wärmemengen, die nöthig sind, um ein anderes Radical  $R^1$  von denselben Metallen zu trennen.

Das Resultat ist mit den von Hrn. E. Wiedemann<sup>1)</sup> gezogenen Consequenzen in vollkommener Uebereinstimmung. Der in unten angegebener Abhandlung im Anschluss an ein durchgeführtes Beispiel aufgestellte Satz lautet: „Der Unterschied der Arbeiten, die geleistet werden müssen, um Chlor vom Kalium und Brom vom Kalium zu trennen, ist gerade so gross wie der entsprechende Arbeitsunterschied bei den Wasserstoffverbindungen.“ Hr. Svante Arrhenius<sup>2)</sup> hat in Erwiderung der Ausführungen von Hrn. E. Wiedemann die Differenzen, welche der Wärmeentwicklung bei Ersatz ver-

1) E. Wiedemann, Sitzgsber. d. physik.-med. Societät. Erlangen, 9. Februar 1891.

2) Svante Arrhenius, Zeitschrift f. physik. Chemie, VIII. Bd. 4. Heft, p. 421.



### III. Ueber die Reciprocität der electrischen Endomose und der Strömungsströme; von Uno Saxén.

(Mitgetheilt aus dem physikalischen Institut der Univers. Leipzig.)

(Hierzu Tafel I Fig. 1–8.)

Die Gesetze der von Reuss entdeckten electrischen Endomose-Erscheinung sind, wie bekannt, hauptsächlich durch die Forschungen Wiedemann's und Quincke's ermittelt und festgestellt worden. Später fand Helmholtz<sup>1)</sup> durch theoretische Erörterungen, dass die von einem galvanischen Strom durch ein cylindrisches Capillarrohr fortgeführte Menge  $U$  einer incompressibelen Flüssigkeit aus der Gleichung

$$(1) \quad U = \frac{\sigma J}{4 \pi k^2} \cdot (\varphi_i - \varphi_a)$$

berechnet werden kann. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Flüssigkeit unverschiebbar an der Rohrwandung haftet. In der Formel (1) ist  $\sigma$  der specifische Leitungswiderstand der Flüssigkeit,  $k^2$  die innere Reibungsconstante der letzteren,  $J$  die Stärke des galvanischen Stromes,  $\varphi_i$  das Potential in der Mitte des Rohres und  $\varphi_a$  das Potential der Flüssigkeit an der Rohrwandung.

Lamb<sup>2)</sup> setzt voraus, dass die Flüssigkeit an der Röhrenwandung entlang gleitet und leitet dementsprechend folgende Gleichung her:

$$(2) \quad U = \frac{\sigma J}{4 \pi k^2} \cdot \frac{l}{d} \cdot E$$

$l$  ist die Gleitungsconstante,  $d$  die Entfernung der beiden electrischen Belegungen der Doppelschicht, die sich an beiden Seiten der Grenzfläche der Flüssigkeit und der Röhrenwandung durch Contact entwickelt,  $E$  ist die Potentialdifferenz dieser Belegungen. Die übrigen Buchstaben haben dieselbe Bedeutung wie in der vorhergehenden Gleichung (1).

Die von Beetz<sup>3)</sup> mit dem Namen „Strömungsströme“ be-

---

1) Helmholtz, Wied. Ann. 7. p. 337. 1879.

2) Lamb, Phil. Mag. (5) 25. p. 52. 1888.

3) Beetz, Pogg. Ann. 146. p. 490. 1872.



Diese interessante Reciprocitätsgleichung der electrischen Endosmose- und Strömungsströme hat eine experimentelle Bestätigung nicht erfahren können, weil die gemachten Beobachtungen dieser Erscheinungen mit verschiedenen Apparaten und in verschiedenen Zeiten ausgeführt sind. Für einen und denselben Apparat liegen dagegen keine gleichzeitigen Beobachtungen beider Erscheinungen vor.

Ich habe darum auf Veranlassung des Hrn. Geheimraths G. Wiedemann mir die Aufgabe gestellt, an ein und derselben Thonplatte und mit ein und derselben Flüssigkeit sowohl die in jener beim Durchpressen der Flüssigkeit entstehende Potentialdifferenz, als auch die beim Leiten eines galvanischen Stromes durch die Thonplatte von dem Strome fortgeführte Flüssigkeitsmenge mit möglichst kurzer Zwischenzeit zu messen.

---

#### § 1. Beschreibung der Apparate und Verlauf der Untersuchung.

Zu dem doppelten Zwecke, den mein Apparat erfüllen musste, hat sich nach mehreren Abänderungen zuletzt die folgende Form als angemessen erwiesen:

Zwei dickwandige Glasflaschen (*A* und *B* Fig. 1 Taf. I) von 130 mm Höhe und 53 mm äusserem Durchmesser wurden seitwärts mit je einem offenen Halse *D*, *D*<sub>1</sub> versehen. An den äusseren Enden der Hälse waren ringsherum laufende Ränder *K* angebracht, vermöge deren und einer Schraubvorrichtung die plangeschliffenen Endflächen der Hälse gegeneinander gepresst werden konnten. Zwischen den Hälsen wurde in beiderseitig eingeschliffene Nuthen eine kreisrunde Thonplatte von 39 mm Durchmesser festgeklemmt. Um diese in den Nuthen luftdicht befestigen zu können, wurde sie erst völlig ausgetrocknet und dann mit Kautschuklösung in die eine Nuthe angeklebt. Die Anklebestellen der entgegengesetzten Seite der Thonplatte wurden beim Zusammenschrauben des Apparats mit Gummiringen gedichtet. Vor dem Einsetzen wurde die Thonplatte mehrmals in destillirtem Wasser ausgekocht und zuletzt eine Zeit lang in die zu benutzende Flüssigkeit gelegt. Aus den mit Schliff versehenen hohlen Glaspfropfen (*P* und *P*<sub>1</sub>) der Flaschen gingen Glasrohre (*R* und *R*<sub>1</sub>), die sowohl jedes mit













16. Mai 1891.  $L = 1000 \text{ Ohm. Temp. } 15^{\circ} \text{ R.}$

$W_1$	$P_1$	$(K + E_1) \cdot 10^7$	$W_2$	$P_2$	$(K - E_2) \cdot 10^7$	$\frac{E_1 + E_2}{2} \cdot 10^7$
48	31,4	2,554	76,5	31,1	1,591	481
49	31,15	2,570	78	31,5	1,634	468
49,5	31,15	2,587	78	31,3	1,654	467
48	31,2	2,521	76,5	31,5	1,602	460

Das Mittel von  $\frac{E_1 + E_2}{2}$  ist  $4,69 \cdot 10^{-5}$ .

Bei der Bestimmung der von einem galvanischen Strome fortgeführten Flüssigkeitsmenge war das Galvanometer in eine Nebenleitung eingeschaltet, welche von der Hauptleitung durch einen Neusilberdraht vom Widerstande 0,2055 Ohm abgeleitet war.

Wir bezeichnen die Ausflussmenge mit  $U$ , das Mittel der Galvanometerausschläge mit  $A$ , die Zeit in Secunden mit  $T$ . Die Stromrichtung von der Flasche  $B$  zu  $A$  ist mit  $B-A$  bezeichnet, die entgegengesetzte  $A-B$ . Die letzte Horizontalreihe der untenstehenden Tabelle zeigt das Mittel ( $M$ ) der in derselben Verticalreihe stehenden Zahlen an.

Temp.  $15^{\circ} \text{ R.}$

Stromrichtung	$U$	$A$	$T$
$A - B$	1,630	162,7	1817
„	1,631	165,8	1825
„	1,494	169,0	1844
$M$	1,585	165,8	1829

Die beiden letzten Tabellen geben:

$$\frac{U}{J} = \frac{1,585 \cdot 0,2055}{1829 \cdot 165,8 \cdot 3199 \cdot 9,334 \cdot 10^{-10}} = 0,3597 \text{ cm}^{\frac{3}{2}} \text{ g}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{V}{P} = \frac{469 \cdot 10}{13,6 \cdot 981} = 0,3515 \text{ cm}^{\frac{3}{2}} \text{ g}^{-\frac{1}{2}}$$

Während der nachfolgenden Beobachtungsreihen benutzte ich bei der Bestimmung der electromotorischen Kraft des Strömungsstromes den Reductionsfactor des Galvanometers. Anstatt die electromotorische Kraft direct zu bestimmen, wurde die Stromstärke des Apparates und sein Widerstand in der



Die übrigen Buchstaben haben dieselbe Bedeutung wie früher. Die Flüssigkeit enthielt  $\frac{3}{4}$  Proc. Zinkvitriol. Der Widerstand des Apparates war 327 Ohm.

## Erste Reihe. 3. Juli.

Galvanometerwiderstand 3242 Ohm. Temperatur 21° R.

$A_1$	$P_1$	$(E_1 + K) \cdot 10^6$	$A_2$	$P_2$	$(E_2 - K) \cdot 10^6$	$\frac{E_1 + E_2}{2} \cdot 10^6$
89,5	40,2	7,417	85,8	38,8	3,074	5,246
90,8	40,0	7,456	89,0	38,3	2,870	5,208
88,2	39,1	7,515	88,0	37,4	2,878	5,194
88,9	39,1	7,574	82,1	37,3	2,867	5,221
86,5	39,0	7,560	82,0	37,7	2,828	5,194
89,6	39,9	7,481	81,4	37,8	2,767	5,124
88,5	39,9	7,389	80,9	37,6	2,738	5,064

Das Mittel des  $\frac{E_1 + E_2}{2}$  ist  $5,179 \cdot 10^{-6}$ .

## Electrische Endosmose. Temp. 21° R.

Stromrichtung	$U$	$A$	$I$
$B-A$	1,595	232,1	1260
"	1,696	233,3	1342
$A-B$	1,676	231,6	1214
"	1,684	231,0	1201
$M$	1,663	232,0	1259

$$\frac{U}{J} = 0,3866; \quad \frac{V}{P} = 0,3882.$$

## Zweite Reihe. 4. Juli.

Der Leitungswiderstand des Apparates 332 Ohm. Temp. 21° R.



Vorzugsweise bei den Fortführungsuntersuchungen, bei welchen ein starker galvanischer Strom zur Verwendung kommt, muss auch die innere Polarisation<sup>1)</sup> oder richtiger die an den Lamellen der Thonplatte abgelagerte Schicht von Ionen, die dieselbe bedingt, als störender Factor auftreten.

Ein störender, aber ziemlich unberechenbarer Einfluss wird durch die Fortführung der Ionen hervorgerufen. Besonders muss die Wirkung gross werden, wenn fremde Stoffe in die verwendete Flüssigkeit eingehen und die Stromstärke gross ist. Bei meinen Untersuchungen sind darum in der Regel die grössten Fehler bei der Bestimmung von der vom Strome fortgeführten Flüssigkeitsmenge aufgetreten.<sup>2)</sup>

Die Verdunstung der Flüssigkeit aus dem unter das Ausflussrohr des Apparates während letztgenannter Untersuchung gestellten verschliessbaren Gläschen betrug dagegen nur ca. 4 mg in der Stunde und kann somit vernachlässigt werden.

Die bei den Beobachtungen der Strömungsströme durch die Thonplatte gepresste Flüssigkeitsmenge erwies sich beim Anfang der Beobachtungen gewöhnlich grösser als nach Beendigung derselben; dessenungeachtet blieb die electromotorische Kraft für einen und denselben Druck so ziemlich unverändert.

Um mich zu überzeugen, dass die Polarisation die erhaltenen Resultate nicht im höheren Grade beeinflusst habe, benutzte ich bei den folgenden Bestimmungen amalgamirte Zinkelectroden, welche in Zinkvitriollösung wenigstens bei der Einwirkung schwächerer Ströme vollständig unpolarisierbar sind.<sup>3)</sup> Die Amalgamirung geschah mit chemisch reinem Quecksilber und ohne Beihülfe irgend einer Säure. Die Electroden blieben endlich während  $\frac{1}{4}$  Stunde in Quecksilber stehen, um die Amalgamirung möglichst vollständig zu machen.

---

1) E. du Bois-Reymond, Monatsber. d. Berl. Acad. v. 4. Aug. 1856. p. 450 ff.

2) Wasser ausgenommen.

3) E. du Bois-Reymond, Monatsber. d. Berl. Acad. v. 30. Juni 1859. p. 465.





Erste Reihe gibt:  $\frac{U}{J} = 0,3501$ ;  $\frac{V}{P} = 0,3377$ .

Zweite „ „  $\frac{U}{J} = 0,3420$ ;  $\frac{V}{P} = 0,3499$ .

Das Mittel:  $\frac{U}{J} = 0,3461$ ;  $\frac{V}{P} = 0,3438$ .

§ 3. Kupfervitriollösung und Kupferelectroden.

Die benutzten Electroden bestanden aus spiralförmig gewundenem Kupferdraht von 1,25 m Länge und 1 mm Durchmesser. Vor dem Einsetzen in den Apparat wurden die Electroden ausgeglüht und in Methylalkohol getaucht, wodurch sie eine blanke Metallfläche erhielten, und hernach mit einem galvanoplastischen Ueberzug aus chemisch reiner Kupfervitriollösung versehen.

Der Reductionsfactor des Galvanometers während der Beobachtungen war  $9,285 \cdot 10^{-10}$ . Die Beobachtungen fingen mit 1 Proc. Lösung an.

Erste Reihe. 13. Nov.

Der Widerstand des Apparates 418 Ohm. Temp. 16° R.

$A_1$	$P_1$	$(E_1 - K) \cdot 10^6$	$A_2$	$P_2$	$(E_2 + K) \cdot 10^6$	$\frac{E_1 + E_2}{2} \cdot 10^6$
32,5	26,6	4,11	48,0	26,8	6,029	5,070
28,7	27,9	3,462	53,9	28,1	6,456	4,959
18,5	22,4	2,781	47,9	21,8	7,395	5,088
22,8	28,6	2,684	63,5	28,9	7,395	5,040
20,9	29,6	2,377	67,8	27,8	8,209	5,293
24,4	31,2	2,632	68,4	31,5	7,309	4,971

Stromrichtung	$U$	$A$	$T$
$B - A$	2,398	258,7	1829
„	2,363	258,3	1810
$A - B$	2,511	254,4	1517
„	2,455	250,0	1510
$M$	2,432	256,6	1667



Die Beobachtungen mit 1 Proc. Lösung erforderten besondere Vorsicht, weil sogar eine ganz kleine Erschütterung des Apparates das Galvanometer beunruhigte. Jene Störungen der Stromstärke verschwanden, sobald der Apparat einige Minuten in Ruhe gestanden hatte. Deshalb wurde jede Beobachtung der Strömungsströme erst vorgenommen, nachdem der hydrostatische Druck fünf Minuten lang gewirkt hatte. Bei der darauf folgenden Untersuchung mit 2 Proc. Lösung zeigte sich der genannte Uebelstand schon in geringerem Grade.

Die Polarisation hat sich sowohl bei 1 Proc. als bei 2 Proc. Lösung als unbedeutend erwiesen.

Für 2 Proc. Kupfervitriollösung wurden folgende Ergebnisse erhalten:

Widerstand des Apparates 268 Ohm. Temp. 15° R.

$A_1$	$P_1$	$(K + E_1) \cdot 10^5$	$A_2$	$P_2$	$(K - E_2) \cdot 10^5$	$\frac{E_1 + E_2}{2} \cdot 10^5$
456,6	30,3	4,852	394,0	30,2	4,201	3,26
463,7	31,8	4,695	401,6	32,0	4,041	3,27
458,0	29,6	4,985	400,2	29,7	4,339	3,24
455,3	30,2	4,854	395,6	30,1	4,232	3,11
449,2	28,9	5,005	392,4	29,0	4,358	3,23
442,9	32,0	4,457	381,5	31,9	3,851	3,03
434,1	29,8	4,691	376,1	29,6	4,091	3,00

Stromrichtung	$U$	$A$	$T$
$B - A$	1,596	300,3	1515
"	1,596	303,6	1513
$A - B$	1,467	308,6	1519
$M$	1,553	304,2	1516

$$\frac{U}{J} = 2329; \quad \frac{V}{P} = 0,2371.$$

§ 4. Kadmiumsulfatlösung und Kadmiumelectroden.

Da Cadmium in Cadmiumsulfatlösung unpolarisierbar ist, habe ich auch unter Anwendung dieser Substanzen die Richtigkeit der Helmholtz-Lamb'schen Formel constatiren können. Das Metall war zu einem 9 mm breiten Blechstreifen ausgewalzt. Die freie Fläche der hieraus geschnittenen Electroden war 90 mm lang. Die letztgenannten wurden mit Sand-



Nachher wurde eine neue Thonplatte von der Dicke 3,3 mm eingesetzt. Bei einer Untersuchung mit 1 proc. Lösung wurden z. B. folgende Resultate erhalten:

Widerstand des Apparates 453 Ohm. Temp. 13° R.

22

Temp. 10 <sup>1</sup> / <sub>3</sub> , ° R.			
Stromrichtung	<i>U</i>	<i>A</i>	<i>T</i>
<i>B—A</i>	0,761	209,1	2129
<i>A—B</i>	0,733	218,1	2094
<i>M</i>	0,747	213,6	2112

$$\frac{U}{J} = 0,1157; \quad \frac{N}{P} = 0,1153.$$

Die Uebereinstimmung ist also für die untersuchten Lösungen durchaus befriedigend.

Für destillirtes Wasser ist es mir nicht gelungen die Richtigkeit der Helmholtz-Lamb'schem Gleichung zu beweisen, obgleich ich die Bestätigung derselben sowohl durch Galvanometer- wie durch Electrometermessungen zu erzielen versuchte. Die dabei benutzten Electroden waren von Platin.

Zuletzt will ich eine interessante Erscheinung erwähnen, welche ich dann erst beobachtete, als der zur Hervorrufung der electrischen Fortführung benutzte Batteriestrom durch den mit <sup>1</sup>/<sub>4</sub> proc. Zinkvitriollösung gefüllten, mit amalgamirten Zinkelectroden versehenen Apparat geleitet wurde.

Sobald nämlich der Strom geschlossen ward, schied sich das Zink wie gewöhnlich bei verdünnter Lösung an der Kathode in Bäumen aus (vorzugsweise an den Stellen, wo die Amalgamirung am unvollständigsten war). Fast gleichzeitig wurden an denselben Stellen Blasen von Wasserstoff, auf Zersetzung des









Erscheinung liegt deshalb wahrscheinlich in Verunreinigung, <sup>in, ~~gungen~~</sup> sei es der Electroden, sei es der Electrolyte.

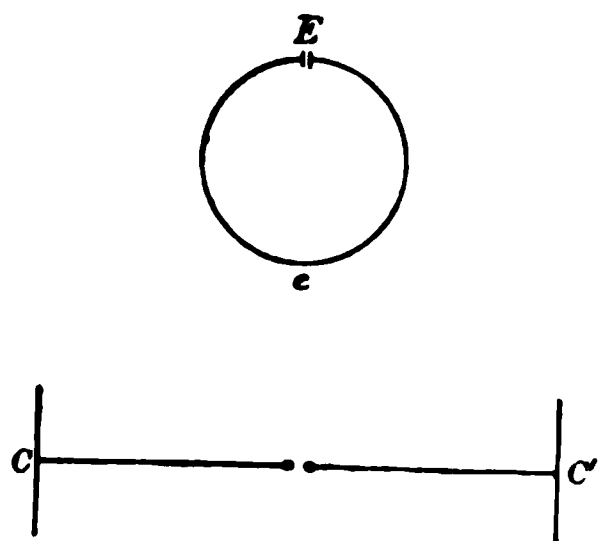
Die zu den oben berichteten Versuchen nöthigen Apparate hat Hr. Geheimrath Prof. G. Wiedemann mir gütigst zur Verfügung gestellt. Ich betrachte es als eine angenehme Pflicht, ihm meine Erkenntlichkeit sowohl hierfür, als für die mir von seiner Seite zu Theil gewordenen werthvollen Rathschläge und Belehrungen darzubringen.

---



2. Fig. 1 zeigt die Versuchsanordnung.  $CC'$  ist der primäre Leiter, bestehend aus zwei kreisförmigen Messing-scheiben (30 cm Durchmesser) als Capacitäten und aus zwei Paar ineinander verschiebbaren Messingröhren als Leitung. Durch Ausziehen der Röhren konnte die Länge  $CC'$  zwischen 74 und 138 cm variiert werden. Die entsprechenden Schwingungs-dauern wurden für drei Längen bestimmt durch electrometrische Messung der stehenden Wellen in sehr langen Drähten und für die übrigen Längen interpolirt.

$Ee$  ist der secundäre Leiter,  $E$  das Electrometer. Als Leitung konnten sechs verschiedene Drähte eingeschaltet werden. Dieselben waren aus Kupfer, Messing, Neusilber, Platina, Nickel und Eisen, welche alle durch dasselbe Loch gezogen



Fi. 1.

und somit sehr genau gleich dick waren. Die Länge der Drähte war 123 cm, der Durchmesser 0,5 mm; alle waren genau in derselben Weise kreisförmig ausgespannt. Es standen also sechs geometrisch congruente Secundärleiter zur Verfügung, deren einziger Unterschied in den verschiedenen physikalischen Eigenschaften der Drähte bestand. Die möglicherweise eintretenden

Unterschiede der Erscheinungen können somit nur auf die Verschiedenheit der physikalischen Eigenschaften der Metalle zurückgeführt werden.

3. Für sämtliche sechs Secundärleiter wurde die Resonanzerscheinung untersucht, indem an jedem derselben die Electrometerausschläge bei fünf verschiedenen Längen des Primärleiters beobachtet wurden. Die entsprechenden fünf Schwingungsdauern sind in der ersten Zeile der folgenden Tabelle enthalten, wobei die des kupfernen Secundärleiters zur Einheit genommen ist. Beste Resonanz in diesem Secundärleiter trat ein, wenn die Länge des Primärleiters 101 cm betrug; dieser Länge, also der Schwingungsdauer 1, entsprach eine ganze (doppelte) Wellenlänge von 420 cm. Die übrigen Zeilen der Tabelle enthalten die Electrometerausschläge, bezogen auf den maximalen Ausschlag beim kupfernen Leiter als Einheit.



überzeugen, wenn man einige Beispiele durchführt. Ich verweise hier auf die Fig. 10 a und b meiner Abhandlung über die Dämpfung schneller electrischer Schwingungen.<sup>1)</sup> Führt man hier verschiedene Werthe für das logarithmische Decrement der secundären Schwingungen ein, so zeigt sich, dass das grösste Maximum nur verhältnissmässig wenig schwankt, während die Anzahl der noch merkbaren Schwingungen sich bedeutend verändert.

5. Dass die Ursache in der Dämpfung und nur in der Dämpfung zu suchen ist, kann man auch in anderer Weise wahrscheinlich machen. Von der Seite des primären Leiters her wird allen Secundärleitern dasselbe Energiequantum geboten unter möglichst genau denselben Vorbedingungen. Es

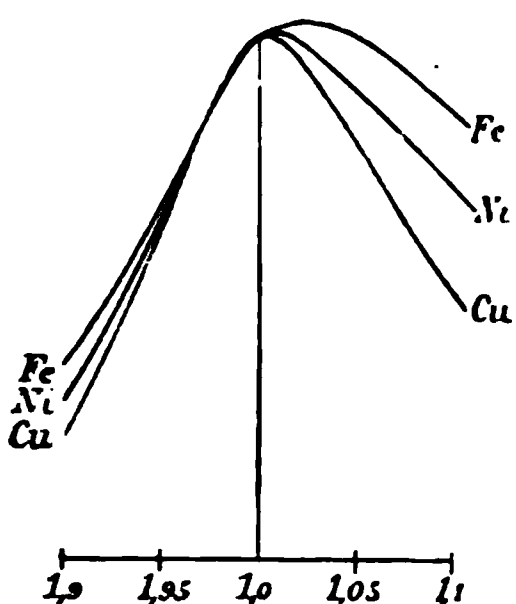


Fig. 3.

scheint dann sehr wahrscheinlich, dass sämtliche Secundärleiter gleichviel Energie auffangen und dass der Unterschied erst beim Absterben der aufgefundenen Energie eintritt.

Endlich enthalten die Curven der Fig. 2 selbst eine Andeutung, dass ein Unterschied der Dämpfung vorliegt. Reducirt man dieselben für einen bestimmten Abscissenwerth, z. B. für den Werth 1, auf dieselbe Höhe, so erhält man die

Fig. 3, wo der Einfachheit halber nur drei Curven gezeichnet sind. Wie man hier sieht, werden die Curven vom Kupfer bis zum Eisen allmählich stumpfer, und dies deutet auf eine zunehmende Dämpfung. Bei einer späteren Gelegenheit werde ich die Formeln entwickeln, wonach man aus den Curven der Fig. 3 und 2 die Dämpfung sämtlicher Secundärleiter berechnen kann. Hier beschränken wir uns darauf, das qualitative Resultat anzugeben:

*Die Metalle haben verschiedenes Vermögen electrische Schwingungen zu dämpfen.*

6. Es sei noch eine Bemerkung in Bezug auf die Schwingungsdauer unserer Secundärleiter gemacht. In den Figuren 2 und 3 erscheinen die Maxima der Resonanzcurven für Eisen

1) Bjerknes, Wied. Ann. 44. p. 74. 1891.



Da die Drähte dieselbe Länge und denselben Durchmesser hatten, sind diese Zahlen den specifischen Widerständen proportional.

In der Fig. 4 sind die Widerstände als Abscissen entsprechenden Electrometerausschläge bei der Schwingungsdauer als Eins Ordinaten aufgetragen.

Es liegen, wie man hier sieht, die vier unmagnetischen Metalle Kupfer, Messing, Neusilber und Platina auf einer verlaufenden Curve. Zunahme des specifischen Widerstandes hat gleichmässiges Abnehmen des Electrometerausschlages zur Folge, was nach dem Vorhergehenden auf eine Zunahme der Dämpfung deutet.

Dagegen fallen die magnetischen Metalle Nickel und Eisen ganz ausserhalb der Curve. Der Messing-, Nickel- und Eisendraht haben, roh gerechnet, denselben Widerstand. Ordnen

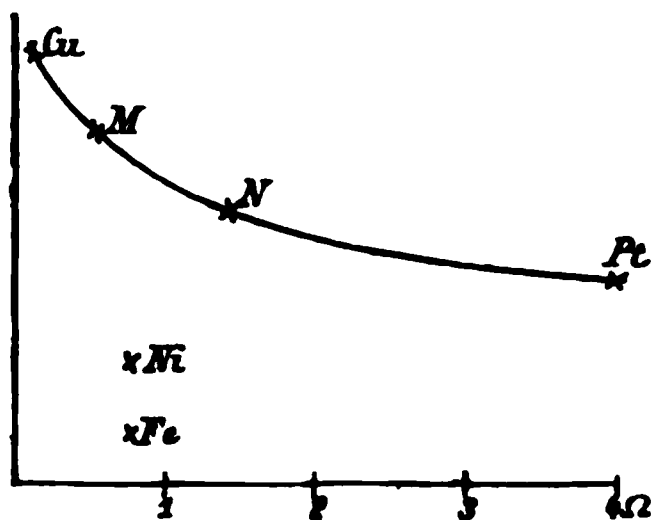


Fig. 4.

diese Metalle nach dem Magnetismus, indem wir den des Messing gleich eins setzen, so zeigt sich mit zunehmendem Magnetismus eine Abnahme der Electrometerausschläge und folglich eine Zunahme der Dämpfung.

Es steht also folgendes Resultat fest:

*Das Vermögen der Metalle, electriche Schwingungen zu dämpfen, nimmt mit Widerstand und Magnetismus zu.*

8. Die Zunahme der Dämpfung mit dem Widerstand erwarteten wir schon. Das starke Eingreifen des Magnetismus dagegen überraschen.

Die Vermuthung des Hrn. Professor Hertz über die Fähigkeit des Magnetismus des Metalls bei diesen schnellen Schwingungen mitzufolgen, scheint also nicht zuzutreffen. Denn jedes Eingreifen des Magnetismus wäre dann wohl möglich.

Vielmehr müssen wir annehmen, dass in einer dünnen Oberflächenschicht ein heftiges Magnetisiren und Ummagnetisiren stattfindet, und dieses kann in zweierlei Weise die Dämpfung vergrössern. Denn einerseits ist es bekannt, dass beim Ummagnetisiren immer ein Energieverlust stattfindet.





immer zu bemerken, dass die Energie, solange sie in electromagnetischer Form vorliegt, sich im Dielectricum befindet, aber doch am stärksten in der Nähe der Metalle concentrirt, wobei der Ausdruck „die aufgefangene Energie“, wenn auch etwas unbestimmt, doch bei qualitativen Ueberlegungen zulässig erscheint.

Die aufgefangene Energie kann nun auf zwei Wegen wieder verschwinden. Denn einerseits müssen wir, wie vom primären Leiter, eine wellenförmige Ausstrahlung annehmen. Andererseits findet im stromtragenden Drahte eine Wärmeentwicklung statt, und diese kann nur dadurch zu Stande kommen, dass electromagnetische Energie vom Dielectricum ins Metall hineingezogen wird. Diese Absorption ist es, welche nach dem Vorhergehenden verschieden schnell vor sich geht, und wir können unser Hauptresultat in folgenden Worte aussprechen:

*Die Metalle haben ein verschieden starkes Absorptionsvermögen für die Energie electrischer Wellen. Die Schnelligkeit der Absorption nimmt mit dem Widerstand und dem Magnetismus des Metalles zu.*

Christiania, Physik. Inst. der Universität, 2. Juli 1892.







mit einer Anordnung nach nebenstehendem Schema, Fig. 2, in welcher  $IIII$  die in der Focallinie des secundären Spiegels befindlichen Leiterhälften,  $Q_1 Q_2$  zwei kleine Hg-Näpfchen,  $G_1 G_2$  zwei etwa 4 cm weite Geissler'sche Röhren mit geringem Electrodenabstand,  $f$  die Hertz'sche secundäre Funkenstrecke und  $A$  den Accumulator bedeuten soll. Ich regulirte die secundäre Funkenstrecke  $f$  so, dass nach Ausschaltung des Accumulators Hertz'sche Funken übersprangen; dann nahm ich von den Accumulatorelementen eine so grosse Zahl, dass bei einer sehr geringen Vermehrung der Elementenzahl der Accumulatorenstrom die drei gemäss Fig. 2 in einen und denselben Stromkreis geschalteten Funkenstrecken  $G_1 f G_2$  zugleich

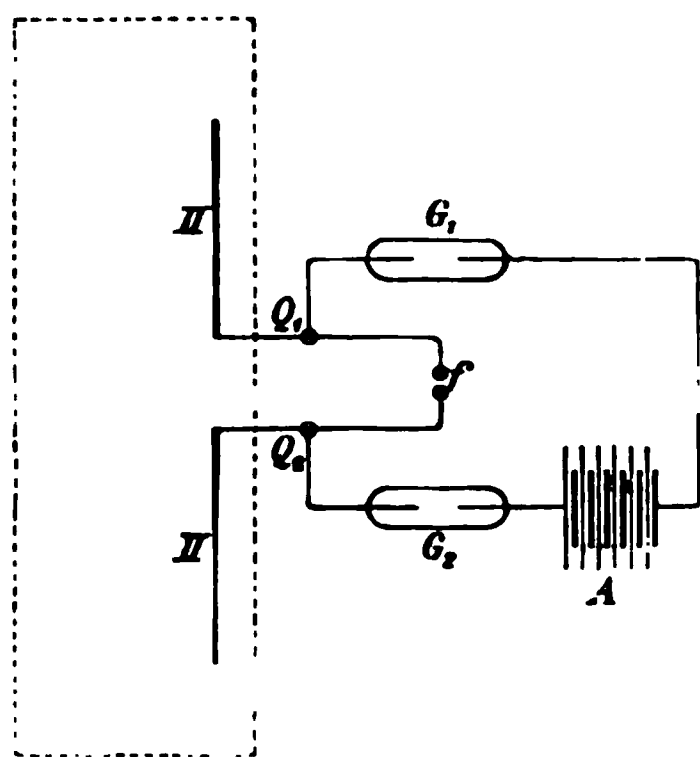


Fig. 2.

durchschlagen konnte. Leitete ich nun in  $f$  noch die Hertz'schen secundären Funken ein, so durchbrach der Strom des Accumulators jene drei hintereinander geschalteten Funkenstrecken, und die hellere Lichterscheinung in den Geissler'schen Röhren liess das Zustandekommen der secundären Funken in  $f$  erkennen.

4. Nun verlegte ich die Funkenstrecke  $f$  selbst in die Geissler'sche Röhre. Zuerst pumpte ich unter fortwähren-

der Beobachtung der secundären Funken eine Röhre, in welche die beiden Electroden der secundären Funkenstrecke eingekittet waren, mit einer Wasserluftpumpe allmählich aus; dabei schien die Lichtstärke der Funken mit zunehmender Luftverdünnung mehr und mehr abzunehmen, bei constant bleibender secundärer Funkenstrecke. Sodann ging ich zu stärkeren Verdünnungen von etwa 1 mm Hg-Druck über, indem ich mit einer von Hrn. C. Kramer in Freiburg i. Br. hergestellten und mir von demselben gütigst überlassenen Kahlbaum'schen Quecksilberluftpumpe evacuirte, welche Luftpumpe mir zu allen diesen Versuchen sehr gute Dienste leistete. Um vorerst möglichst kleine secundäre Funkenstrecken





















schiebung der beiden entsprechenden Secundärströme gegeneinander bewirkt werden, welche, wenn auch ausserordentlich klein, doch gross genug sein kann, um das nothwendige synchrone Auftreten der Hertz'schen secundären Funken und der Entladungen des Schlittenapparates in meinen Versuchsröhren zu beeinträchtigen. Durch Variiren der Länge der Leitungsdrähte, welche von beiden Inductorien zu ihren Funkenstrecken führten, hoffte ich diese Zeitdifferenzen zum Verschwinden bringen zu können, hatte aber damit bis dahin keinen Erfolg. Aller Wahrscheinlichkeit nach würde man sicher zum Ziele gelangen, wenn man sich ein Inductorium

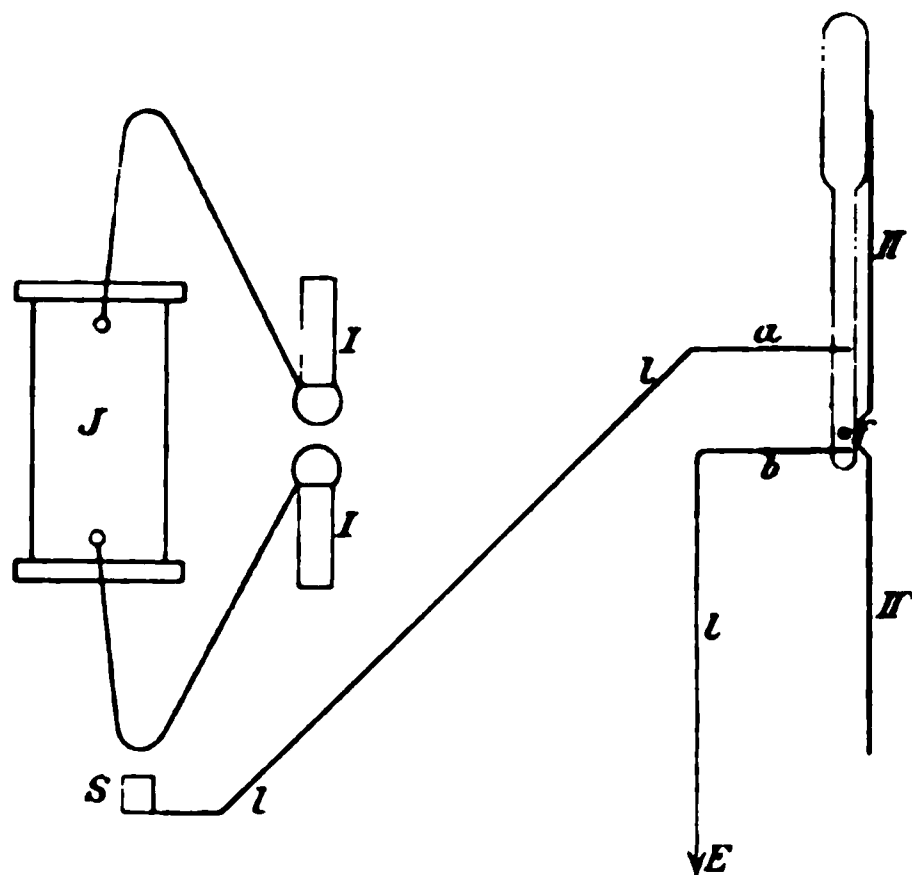


Fig. 7.

herstellte, mit zwei Secundärspulen von passenden Windungszahlen auf *einem* Eisenkern mit *einer* Primärspule, oder wenn man an seinem Ruhmkorff noch eine entsprechende kleinere Secundärspule anbrächte zur Erzeugung der für die Versuchsröhren nothwendigen schwächeren Inductionsströme.<sup>1)</sup>

11. Statt diesen letzteren Weg einzuschlagen, versuchte ich noch ein anderes Mittel. Durch Büschelentladungen leitete ich einen Theil des vom Ruhmkorff gelieferten Secundärstromes

1) Vielleicht liesse sich durch diese Anordnung ein Mittel gewinnen, um äusserst kleine Zeitdifferenzen bei den Magnetisirungen verschiedener Eisenmassen messend zu verfolgen.





Hertz'schen Spiegelversuche augenfälliger als irgend eine andere bis dahin bekannt gemachte Anordnung objectiv dargestellt werden.<sup>1)</sup>

Freiburg i. B., Physikal. Inst. der Univ., Juli 1892.

---

1) Zweckmässig wird man zur Demonstration einen möglichst grossen Spiegelabstand wählen; dagegen sind bei feuchter Luft (stark gefülltes Auditorium!) die Spiegel einander näher zu rücken. — In seiner Vorlesung über Experimentalphysik zeigte Hr. Prof. Warburg nahezu alle Hertz'schen Spiegelversuche nach der hier beschriebenen Darstellungsart, ohne Verdunkelung des Auditoriums.

---



von der Natur, dass dadurch in den Differentialgleichungen oder Grenzbedingungen der electrischen Lichttheorie nichts geändert wird; mit anderen Worten bleibt in der electrischen Theorie der Reflexion und der Brechung alles auch dann fest stehen, wenn  $D$  (die Dielectricitätsconstante) und  $\kappa$  (der specifische Widerstand) des Mediums Functionen der Schwingungsperiode werden. Sechstens endlich zeigt noch unsere Theorie, in welcher Weise man auch zur Erklärung jener bemerkenswerthen Thatsache gelangen kann, dass der gewöhnliche electrische Widerstand der Metalle sehr von der Temperatur abhängt, jedoch scheinen die sogenannten optischen Constanten der Metalle von der Temperatur so gut wie unabhängig.

1. Wie bekannt, enthalten nur die folgenden Gleichungen der Maxwell'schen Lichttheorie die specifischen Constanten eines isotropen Mediums:

$$(1) \quad f = \frac{D}{4\pi} P, \quad g = \frac{D}{4\pi} Q, \quad h = \frac{D}{4\pi} R$$

$$(2) \quad p = \frac{P}{\kappa}, \quad q = \frac{Q}{\kappa}, \quad r = \frac{R}{\kappa},$$

worin  $f, g, h$  die Componenten des dielectrischen Momentes,  $p, q, r$  dieselben des Ohm'schen Stromes,  $P, Q, R$  die der gesamten electromotorischen Kraft im Punkte  $x, y, z$  bedeuten.

Alle Grössen sind electrostatisch in c. g. s. gemessen; ferner wollen wir noch annehmen, dass bei den Lichtschwingungen sich alle Körper „magnetisch“ ebenso wie der Lichtäther verhalten, d. h. wir setzen  $\mu$  von Maxwell gleich Eins.

Die Gleichungen (1) und (2) sind von rein hypothetischer Natur und, streng genommen, sind sie nur auf die unendlich langsam vor sich gehenden Processe anwendbar.

Die Componenten des Gesamtstromes  $u, v, w$  werden durch die bekannten Beziehungen gegeben:

$$(3) \quad u = \frac{\partial f}{\partial t} + p, \quad v = \frac{\partial g}{\partial t} + q, \quad w = \frac{\partial h}{\partial t} + r,$$

die für den freien Aether in die Gleichung übergehen

$$u = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial P}{\partial t}, \quad v = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial Q}{\partial t}, \quad w = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial R}{\partial t},$$

da in diesem Falle  $D = 1$ ,  $\kappa = \infty$ ,  $p = q = r = 0$  zu setzen ist.



$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_n = \frac{\delta_n}{4\pi} \frac{\partial P_n}{\partial t} + \frac{P_n}{\kappa_n} \\ v_n = \frac{\delta_n}{4\pi} \frac{\partial Q_n}{\partial t} + \frac{Q_n}{\kappa_n} \\ w_n = \frac{\delta_n}{4\pi} \frac{\partial R_n}{\partial t} + \frac{R_n}{\kappa_n}, \end{array} \right.$$

worin  $\delta_n$  und  $1/\kappa_n$  durch die Reihen der Form

$$(8) \quad \delta = \delta_0 - \frac{\delta_1}{T^2} + \frac{\delta_2}{T^4} + \dots$$

darstellbar sind, da  $P \dots$  von  $T$  nur in der Weise abhängen, dass sie den Factor  $e^{-iqt}$ ,  $q = 2\pi/T$  enthalten.

Demgemäss betragen:

$$\frac{\partial^{2n} P}{\partial t^{2n}} = (-1)^n q^{2n} P, \quad \frac{\partial^{2n+1} P}{\partial t^{2n+1}} = (-1)^n q^{2n} \frac{\partial P}{\partial t},$$

und wir bekommen:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial P}{\partial t} + \sum (\delta_n - 1) \frac{\partial P_n}{\partial t} \right\} + \sum \frac{P_n}{\kappa_n} \\ v = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial Q}{\partial t} + \sum (\delta_n - 1) \frac{\partial Q_n}{\partial t} \right\} + \sum \frac{Q_n}{\kappa_n} \\ w = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial R}{\partial t} + \sum (\delta_n - 1) \frac{\partial R_n}{\partial t} \right\} + \sum \frac{R_n}{\kappa_n}. \end{array} \right.$$

Für einen Krystall sollen nur  $\delta_n$  und  $\kappa_n$  je nach der Richtung  $x, y, z$  verschieden, d. h.  $\delta_{xn}, \delta_{yn}, \delta_{zn}$  etc. genommen werden.

In der Herstellung der Gleichungen (9) besteht unsere *erste* Hypothese.

4. Ohne Zweifel hängen  $P_n \dots$  von  $P \dots$  und ihrer Differentialquotienten nach der Zeit ab; bei gewissen Annahmen über die Art und Weise, in welcher die electrischen Processe in den Molecülen vor sich gehen, lässt sich diese Abhängigkeit bestimmen; uns scheint es aber viel bequemer, wenn wir einfach annehmen, dass die Beziehung zwischen  $P_n \dots$  und  $P \dots$  sich durch eine lineare Differentialgleichung darstellen lässt. Wir setzen also für einen isotropen Körper:



$$(12) \left\{ \begin{aligned} D &= 1 + \sum \frac{(\delta_n - 1) \left\{ \alpha_n (1 - c_n q^2) + b_n \beta_n q^2 \right\} + \frac{4\pi}{x_n} \left\{ \beta_n (1 - c_n q^2) - \alpha_n b_n \right\}}{(1 - c_n q^2)^2 + b_n^2 q^2} \\ \frac{1}{x} &= \sum \frac{\frac{1}{x_n} \left\{ \alpha_n (1 - c_n q^2) + b_n \beta_n q^2 \right\} - \frac{\delta_n - 1}{4\pi} q^2 \left\{ \beta_n^2 (1 - c_n q^2) - \alpha_n b_n \right\}}{(1 - c_n q^2)^2 + b_n^2 q^2} \end{aligned} \right.$$

gegeben sind.

6. Bei  $q = 0$ ,  $T = \infty$  haben wir

$$D_x = 1 + \sum \alpha_n (\delta_n - 1) + \frac{4\pi}{x_n} \beta_n; \quad \frac{1}{x_x} = \sum \frac{\alpha_n}{x_n};$$

ebenso bei  $q = \infty$ ,  $T = 0$  ist

$$D_0 = 1, \quad \frac{1}{x_0} = \sum \frac{\beta_n (\delta_n - 1)}{4\pi c_n},$$

woraus folgt, dass alle  $\delta_n$  nicht Null, alle  $x_n$  nicht unendl werden sollen. Die Formel für  $1/x$  gibt nicht, wie diese von Hrn. Kolaczek  $x_x = \infty$  (bei  $T = \infty$ ). Unsere Dispersionsformel wird daher nicht mit derselben der Ketteler'schen Theorie zusammenstimmen.

Es ist aber bemerkenswerth, dass die Gleichungen (die Dispersionsformeln von Lommel und v. Helmholtz) sich enthalten. In der That, nehmen wir an, dass

$$\frac{(\delta_n - 1) \beta_n}{4\pi \alpha_n} x_n = c_n$$

und setzen weiter

$$c_n q^2 = \frac{\lambda_n^2}{\lambda^2}, \quad \frac{b_n}{\sqrt{c_n}} = \epsilon_n, \quad \frac{1}{\sqrt{c_n}} \left\{ \frac{\beta_n}{\alpha_n} + \frac{(\delta_n - 1) x_n}{4\pi} \right\} = k_n,$$

so beträgt

$$\frac{(\delta_n - 1) k_n}{4\pi} + \frac{\beta_n}{\alpha_n} - b_n = k_n \sqrt{c_n} - b_n = (k_n - \epsilon_n) \sqrt{c_n}$$

und dem zu Folge

$$D = 1 + \sum 4\pi \frac{\alpha_n}{x_n} \sqrt{c_n} (k_n - \epsilon_n) \frac{1 - \frac{\lambda_n^2}{\lambda^2}}{\left(1 - \frac{\lambda_n^2}{\lambda^2}\right)^2 + \epsilon_n^2 \frac{\lambda_n^2}{\lambda^2}}$$



$$\frac{1}{x} = \sum \frac{\alpha_n}{x_n} \frac{\left(1 - \frac{\lambda_n^2}{\lambda^2}\right)^2 + k_n \varepsilon_n \frac{\lambda_n^2}{\lambda^2}}{\left(1 - \frac{\lambda_n^2}{\lambda^2}\right)^2 + \varepsilon_n^2 \frac{\lambda_n^2}{\lambda^2}}.$$

Setzen wir endlich

$$\frac{4\pi\alpha_n}{x_n} \sqrt{c_n} = \frac{m_n}{\mu} (k_n - \varepsilon_n)$$

und erinnern wir uns, dass

$$D = N^2 - K^2, \quad 2NK = \frac{2T}{x},$$

so folgen die Lommel'schen Gleichungen<sup>1)</sup>

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} N^2 - K^2 &= 1 + \sum \frac{m_n}{\mu} (k_n - \varepsilon_n)^2 \frac{1 - \frac{\lambda_n^2}{\lambda^2}}{\left(1 - \frac{\lambda_n^2}{\lambda^2}\right)^2 + \varepsilon_n^2 \frac{\lambda_n^2}{\lambda^2}} \\ 2NK &= \sum \frac{m_n}{\mu} (k_n - \varepsilon_n) \frac{\lambda}{\lambda_n} \frac{\left(1 - \frac{\lambda_n^2}{\lambda^2}\right)^2 + k_n \varepsilon_n \frac{\lambda_n^2}{\lambda^2}}{\left(1 - \frac{\lambda_n^2}{\lambda^2}\right)^2 + \varepsilon_n^2 \frac{\lambda_n^2}{\lambda^2}}. \end{aligned} \right.$$

7. Nun wollen wir setzen

$$\delta_n = 1,$$

so folgt

$$D = 1 + \sum \frac{4\pi\beta_n}{x_n} \frac{1 - c_n q^2 - \frac{\alpha_n b_n}{\beta_n}}{(1 - c_n q^2)^2 + b_n^2 q^2}$$

$$\frac{1}{x} = \sum \frac{\alpha_n}{x_n} \frac{1 - c_n q^2 + \frac{b_n \beta_n}{x_n} q^2}{(1 - c_n q^2)^2 + b_n^2 q^2};$$

durch die Bezeichnungen

$$\frac{4\pi\alpha_n \sqrt{c_n}}{x_n} = A_n, \quad \frac{b_n}{\sqrt{c_n}} = B_n, \quad \frac{\beta_n}{\alpha_n \sqrt{c_n}} = C_n, \quad c_n q^2 = \frac{\lambda_n^2}{\lambda^2}$$

lassen sich die erhaltenen Gleichungen schreiben

1) Lommel, Wied. Ann. 16. p. 427. 1882.

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} N^2 - K^2 &= 1 + \sum A_n C_n \frac{1 - \frac{\lambda_n^2}{\lambda^2} - \frac{B_n}{C_n}}{\left(1 - \frac{\lambda_n^2}{\lambda^2}\right)^2 + B_n^2 \frac{\lambda_n^2}{\lambda^2}} \\ 2 N K &= \sum A_n \frac{\lambda}{\lambda_n} \frac{1 + (B_n C_n - 1) \frac{\lambda_n^2}{\lambda^2}}{\left(1 - \frac{\lambda_n^2}{\lambda^2}\right)^2 + B_n^2 \frac{\lambda_n^2}{\lambda^2}} \\ \frac{1}{\kappa} &= \sum \frac{A_n \mathfrak{B}_0}{2 \lambda_n} \frac{1 + (B_n C_n - 1) \frac{\lambda_n^2}{\lambda^2}}{\left(1 - \frac{\lambda_n^2}{\lambda^2}\right)^2 + B_n^2 \frac{\lambda_n^2}{\lambda^2}}, \end{aligned} \right.$$

worin  $\lambda$  die Wellenlänge,  $\mathfrak{B}_0$  die Lichtgeschwindigkeit im freien Aether bedeuten.

Die Gleichungen (14) gehen in dieselben von v. Helmholtz<sup>1)</sup> über, indem man

$$B_n C_n = 1$$

setzt.

Für einen durchsichtigen Körper ist zu nehmen

$$b_n = 0, \alpha_n = 0, A_n = 0, B_n = 0,$$

nicht aber  $A_n C_n = 0$ , da

$$A_n C_n = \frac{4 \pi \beta_n}{\kappa_n} = A_n.$$

Dann ist  $1/\kappa = 0$ ,  $K = 0$ , und es folgt

$$(15) \quad D = N^2 = 1 + \sum \frac{A_n}{1 - \frac{\lambda_n^2}{\lambda^2}};$$

wie bekannt, stimmt diese Formel in ziemlich weiten Grenzen mit den Beobachtungsergebnissen zusammen.<sup>2)</sup>

Bei  $T = \infty$  und  $T = 0$  geben die Gleichungen (13) einen und denselben Werth von  $\kappa$ , was uns unwahrscheinlich zu sein scheint. In weiterem wollen wir daher die Gleichungen (14) benutzen, obgleich wir nicht die vereinfachende Annahme  $B_n C_n = 1$  gelten lassen wollen.

1) v. Helmholtz, Pogg. Ann. 154. p. 502. 1874.

2) Wüllner, Wied. Ann. 17. p. 580. 1882 u. 23. p. 306. 1884.



$\lambda \cdot 10^4$	$D$	$\frac{1}{\mathfrak{B}_0^2 \kappa} \cdot 10^6$	$\lambda \cdot 10^4$	$D$	$\frac{1}{\mathfrak{B}_0^2 \kappa} \cdot 10^6$
0,00	+ 1,00	0,00	0,8082	+ 0,00	—
0,1415	0,00	—	0,8136	+ 1,00	—
0,4308	— 9,88	1,76	1,00	+ 26,42	7,12
0,6353	— 19,81	—	1,3556	+ 33,20	—
0,6561	— 19,74	6,71	2,00	+ 32,22	1,50
0,7721	— 6,87	10,29	$\infty$	+ 29,03	0,63,

und indem wir diese Zahlen mit den  $D$  und  $1/\kappa$ , die durch Quincke's Beobachtungen bestimmt sind, vergleichen,

$\lambda \cdot 10^4$	$D$	$\frac{1}{\mathfrak{B}_0^2 \kappa} \cdot 10^6$
$G$ 0,4308	— 10,71	1,97
$F$ 0,4860	— 14,71	2,69
$E$ 0,5268	— 17,23	3,36
$D$ 0,5888	— 20,99	5,14
$C$ 0,6561	— 18,05	7,14,

so überzeugen wir uns von dem Einklang der theoretischen  $D$  und  $1/\kappa$  mit den experimentell gefundenen.

Die Grenzwerte von  $D$  und  $1/\kappa$  ergeben sich

$$D_{\infty} = 29,03, \quad \frac{1}{\kappa_{\infty}} = 0,63 \cdot 10^{-6} \cdot \mathfrak{B}_0^2.$$

Wenn nun die erste Zahl als nicht unwahrscheinlich scheint, so ist die letzte etwa 300 mal kleiner, als die spezifische Leitungsfähigkeit des Zinkes für die stationären Ströme, die bekanntlich 5400 c. g. s. (electromagnetisch) beträgt, also ist

$$\frac{1}{\kappa} = 1,9 \cdot 10^{-4} \cdot \mathfrak{B}_0^2.$$

10. Es lässt sich leicht zeigen, in welcher Weise man diesen Widerspruch zu beseitigen zu suchen hat. In der That nehmen wir an, dass Zink ausser eines Absorptionsbandes im Spectrum nahe bei  $\lambda = 0,7886 \cdot 10^{-4}$  noch einen anderen bei einem etwa 100 mal grösseren  $\lambda$  besitzt, d. h. bei etwa  $\lambda_2 = 78,86 \cdot 10^{-4}$ . Dann brauchen wir noch ein Glied der Dispersionsformel mit den Coefficienten  $A_2, B_2, C_2, \lambda_2$ . Der Einfachheit halber setzen wir  $B_2 = C_2 = 1$ ,  $A_2 = 30\,000$ ; dann ergibt sich Folgendes. Das zweite Glied in  $D$  wächst von 0 ab, bei  $\lambda = 0$ , sehr langsam und beträgt nur  $-3,1$  bei  $\lambda = 0,8 \cdot 10^{-4}$ . Im Gebiete des sichtbaren Spectrums ist dieses zweite Glied auf den Werth von  $D$  von sehr kleiner Bedeutung; ebenso hat dasselbe keinen







Die Beziehung zwischen  $N_x$  und  $D_x$  etc. ist, wie bekannt, experimentell bestätigt; ferner sind die gewonnenen Dispersionsformeln mit denselben von Lommel identisch; dieselben Formeln haben auch wir aus der Thomson'schen molecularen Lichttheorie abgeleitet; für Arragonit und Topas nach Lommel's Berechnungen, für den Spath nach den unserigen stellt diese Dispersionsformel die Beobachtungsergebnisse auf der ganzen Länge des Spectrums (von  $A$  bis  $T$ ) in genügender Weise dar.<sup>1)</sup>

Da endlich in der electricischen Lichttheorie die Lage der optischen Axen durch dieselben Gleichungen wie in der mechanischen Theorie gegeben wird, so bleiben diese Gleichungen auch dann unverändert bestehen, wenn die Lichtgeschwindigkeiten in den Richtungen der  $x$ ,  $y$ ,  $z$ -Axen  $\mathfrak{B}_x$ ,  $\mathfrak{B}_y$ ,  $\mathfrak{B}_z$  als Functionen von  $T$  erscheinen; jetzt wird nur die Lage der optischen Axen selbst von  $T$  abhängen: wir werden somit die bekannte Erscheinung der „Axendispersion“ bekommen.

---

Resumiren wir nun alles gesagte, so schliessen wir, dass die von uns vorgeschlagene Erklärung der Dispersion und Absorption des Lichtes vom Standpunkte der electricischen Lichttheorie jedenfalls allen Forderungen genügt, die jeder solchen Theorie aufgelegt werden. Indem unsere Theorie die HAUPTerscheinungen der Lichtzerstreuung den Beobachtungen entsprechend erklärt, zeigt noch dieselbe wenigstens den Weg, auf welchem man zur Beseitigung einiger Schwierigkeiten der electricischen Lichttheorie gelangen kann.

Kasan, im November 1891.

---

1) Goldhammer, Journ. Russ. Phys. Chem. Ges. 18. 1886. Beibl. 11. 1887.



























200° die Temperatur in der Mitte des Gefässes bestimmt, indem sich die Löthstelle des Thermoelements an ihrem ursprünglichen Orte befand; darauf wurde jedesmal die Löthstelle zuerst um 150 mm, dann noch weiter um 100 mm in die Capillare gezogen und die electromotorische Kraft gemessen.

Indem dieselben Messungen in umgekehrter Reihenfolge wiederholt und aus den entsprechenden Beobachtungen die Mittel gebildet wurden, erhielt man für eine Reihe von Werthen für die Temperatur in der Mitte des Gefässes die zugehörigen Werthe in der Capillare. Die Messung musste sowohl bei steigender wie bei fallender Temperatur ausgeführt werden, da durch die Heizung eine Aenderung des Temperaturgefälles in der Capillare bedingt wird. Denn bei aufsteigender Temperatur liegt ein Theil der Capillare — das Stück, das zwischen Muffel 2 und 3 liegt — den Flammen näher als das eigentliche Gefäss; es steigt also in diesem Theil die Temperatur schneller und erreicht einen grösseren Werth. Für die Berechnung dieser so bestimmten Temperaturen wurde vorher die electromotorische Kraft des Thermoelements mittels einer Näherungsformel als Function der Temperatur bestimmt. Es zeigte sich später, dass diese eine Näherung vollständig genügte.

Bei der Berechnung der Einwirkung wurde der Raum jeder Capillare in drei Theile getheilt, vom Ansatz der Capillare bis Punkt II (Fig. 5), von Punkt II bis III, endlich von III bis IV; in dem letzten Punkte herrschte Zimmertemperatur. Für jeden Raum wurde dann aus den Beobachtungen die mittlere Temperatur berechnet. Für den ersten konnte, da die Temperaturen an seinen Enden nicht sehr verschieden waren, das Mittel aus beiden genommen werden. Für die beiden anderen, welche das Temperaturgefälle nach aussen enthielten, konnte angenommen werden, dass das Gefälle hauptsächlich durch den leitenden Platindraht bestimmt und demnach der Function  $\beta e^{\alpha z}$  gemäss sich gestalten müsse, wenn  $z$  die variable Länge und  $\beta$  und  $\alpha$  Constanten bedeuten.

Wir bezeichnen die drei Räume mit  $R_1, R_2, R_3$ . Die Dimensionen bei dem ersten Gefäss waren:



Ist  $a$  die Länge des Raumes  $R_2$ , so ist die mittlere Temperatur in ihm:

$$t_2 = \frac{T_3}{a} \int_0^a e^{az} dz = \frac{T_3}{a} (e^{aa} - 1).$$

Es ist:

$$a a = \frac{\log \frac{T_2}{T_3}}{\log e},$$

also:

$$t_2 = \frac{\log e}{\log \frac{T_2}{T_3}} (T_2 - T_3);$$

ebenso wenn  $T_4$  die Zimmertemperatur ist, so wird:

$$t_3 = \frac{\log e}{\log \frac{T_3}{T_4}} (T_3 - T_4).$$

In der folgenden Tabelle sind die erhaltenen Werthe zusammengestellt

$T_1$	$T_2$	$T_3$	$t_1$	$t_2$	$t_3$
Steigende Temperatur mit leuchtender Flamme					
188°	320°	18°	254°	107°	18°
228	570	36	399	193	26
596	890	92	743	341	45
732	932	135	832	412	58
mit Gebläse					
1040	1354	220	1197	626	81
1292	1440	288	1366	716	98
1324	1450	287	1387	721	97
Fallende Temperatur					
1327	854	296	1091	526	99
1132	648	368	940	495	116
684	588	348	636	458	111
556	484	324	520	398	106
484	428	256	456	334	99

Der schädliche Raum  $R_4$  im Glasgefäß, der beständig auf Zimmertemperatur blieb, hatte ein Volumen von 1,2903 ccm, das Luftgefäß  $V$  des Thermometers ein solches von 98,32 ccm bei Zimmertemperatur.

Die beobachteten Werthe für die mittlere Temperatur der Räume  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  wurden dann als Functionen von  $T_1$  auf-









$x$  die Entfernung der Marken in Millimeter,  
 $\delta$  die Ausdehnung des Porzellanstreifens in Milimetern,  
 $\beta$  den linearen Ausdehnungscoefficienten des Porzellans für 1°.

Platten I, IV und V bestanden aus demselben Porzellan wie das zum Luftthermometer benutzte. Die anderen sind von wenig verschiedener Zusammensetzung, und die Werthe jeder Platte stimmen unter sich besser als mit denen anderer Platten überein. Indessen scheinen die individuellen Unterschiede einzelner Platten desselben Materials ebenso gross zu sein, wie die von Platten verschiedener chemischer Zusammensetzung.

Datum	$t_1$	$t_2$	$t_2 - t_1$	$p$	$T$	$x$	$d$	$\delta$	$\beta$	Platte
1892										
24./3.	18°	1024°	1006°	23,5	18°	87,83	92,97	0,375	0,0000041	Nr. II
	17	1024	1007	21,4	17	87,83	92,97	0,341		"
	17	1044	1027	21,2	21	87,83	92,97	0,338		"
	17	1080	1063	22,9	21	87,83	92,97	0,365		"
	80	1080	1000	23,2	19	87,83	92,97	0,370		"
	60	1015	955	22,9	20	87,83	92,97	0,365		"
	93	538	445	9,5	20	87,83	92,97	0,152	0,0000039	"
25./3.	20	1051	1031	22,8	20	89,67	92,97	0,364	0,0000044	Nr. III
	86	1051	965	23,8	22	89,67	92,97	0,380		"
	86	1084	998	25,4	25	89,67	92,97	0,405		"
	94	1084	990	24,8	24	89,67	92,97	0,395		"
	86	602	516	11,5	21	89,67	92,97	0,183	0,0000044	"
	25	528	503	13,0	19	89,67	92,97	0,207		"

Für Platte I, IV, V ergaben sich:

	$t_2$	$t_1 - t_2$	$\beta$
I	1062°	1044°	0,0000046
IV	1131°	1023°	0,0000044
IV	1006°	896°	0,0000043
V	1122°	1102°	0,0000047
V	1122°	1031°	0,0000048
V	649°	559°	0,0000048

Die zur Beobachtung erforderliche Constanz der Temperatur konnte nur durch Herstellung eines stationären Zustandes erreicht werden. Es wurden deswegen die Beobachtungen auf zwei Temperaturintervalle beschränkt, von denen das eine von Zimmertemperatur bis zu 500° ging und durch leuchtende Gasflamme ohne Gebläse hergestellt wurde. Das zweite erstreckte sich dann bis zur oberen Grenze. Wie man aus den Tabellen ersieht, kann man keine constanten Unter-



Zum Schlusse wurde das Gefäss aus dem Ofen genommen und in einen Kupferkasten gelegt, um noch Temperatur von  $100^{\circ}$  bis  $-80^{\circ}$  beobachten zu können. Diese wurde theils durch ein Wasserbad, theils durch Kältemischungen und feste Kohlensäure hergestellt. Die Füllung entsprach hier bei  $0^{\circ}$  einem Druck von 699,1 mm Quecksilber.

Das zweite Gefäss, welches für die Beobachtung höherer Temperatur diente, wurde deshalb nur mit einem Luftquantum von 117,0 mm Druck bei  $0^{\circ}$  gefüllt.

Vor der Berechnung wurden alle abgelesenen Quecksilberhöhen auf  $0^{\circ}$  reducirt.

Bedeutet alsdann <sup>1)</sup>

$V$  das Volumen des Gefässes beim absoluten Nullpunkt

$v_1, v_2 \dots$  die Volumen der einzelnen Theile des schädlichen Raums,

$T$  die zu bestimmende absolute Temperatur im Gefässe

$P$  den Druck der Luft bei der Temperatur  $T$ ,

$t_1, t_2 \dots$  die absoluten Temperaturen der schädlichen Räume bei der Beobachtung,

$\mathfrak{T}, \mathfrak{P}, t_1, t_2 \dots$  die entsprechenden Grössen bei  $0^{\circ}$  (als  $\mathfrak{T} = t_1 = t_2 = \dots = 272,5$ ),

$3\beta$  den cubischen Ausdehnungscoefficienten des Porzellan und legt man für den absoluten Nullpunkt den Werth 272 zu Grunde, welcher dem Werthe 0,00667 des Ausdehnungscoefficienten der Luft entspricht, so ist, wenn wir von der Volumenveränderung der schädlichen Räume absehen,

$$P \left( \frac{1 + 3\beta T}{T} + \frac{1}{V} \sum_1^n \frac{v_n}{t_n} \right) = \mathfrak{P} \left( \frac{1 + 3\beta \mathfrak{T}}{\mathfrak{T}} + \frac{1}{V} \sum_1^n \frac{v_n}{t_n} \right)$$

Die rechte Seite der Gleichung ist für jede Füllung eine Constante.

Da die Grösse

$$\frac{1}{V} \sum_1^n \frac{v_n}{t_n}$$

für jedes Gefäss nur eine bestimmte Function der Temperatur ist (vgl. § 3), so wurde diese nach den oben erhaltenen Werthen für ein bestimmtes Intervall von  $t$  berechnet und dann graphisch aufgetragen; es konnte dann ihr Werth für jede gegebene  $T$  aus der so erhaltenen Curve entnommen werden.

1) Weinhold, Pogg. Ann. 149. p. 195.



zu 500 Mikrovolt fortschreitenden Werthe des Arguments berechnet worden sind. Eine Uebersicht des Verlaufes zeigt die Curve in Fig. 8.

$t$	$e$	$f(e)$	$t$	$e$	$f(e)$
$-80^{\circ}$	$-361$	$-$	$816^{\circ}$	$7500$	$818^{\circ}$
$0^{\circ}$	$0$	$0^{\circ}$	$862^{\circ}$	$8000$	$862^{\circ}$
$82^{\circ}$	$500$	$68^{\circ}$	$906^{\circ}$	$8500$	$904^{\circ}$
$154^{\circ}$	$1000$	$133^{\circ}$	$952^{\circ}$	$9000$	$947^{\circ}$
$220^{\circ}$	$1500$	$205^{\circ}$	$996^{\circ}$	$9500$	$988^{\circ}$
$273^{\circ}$	$2000$	$258^{\circ}$	$1038^{\circ}$	$10000$	$1030^{\circ}$
$329^{\circ}$	$2500$	$316^{\circ}$	$1080^{\circ}$	$10500$	$1071^{\circ}$
$379^{\circ}$	$3000$	$373^{\circ}$	$1120^{\circ}$	$11000$	$1111^{\circ}$
$431^{\circ}$	$3500$	$428^{\circ}$	$1163^{\circ}$	$11500$	$1151^{\circ}$
$482^{\circ}$	$4000$	$482^{\circ}$	$1200^{\circ}$	$12000$	$1192^{\circ}$
$533^{\circ}$	$4500$	$534^{\circ}$	$1241^{\circ}$	$12500$	$1233^{\circ}$
$584^{\circ}$	$5000$	$584^{\circ}$	$1273^{\circ}$	$13000$	$1273^{\circ}$
$633^{\circ}$	$5500$	$633^{\circ}$	$1311^{\circ}$	$13500$	$1314^{\circ}$
$680^{\circ}$	$6000$	$681^{\circ}$	$1354^{\circ}$	$14000$	$1356^{\circ}$
$725^{\circ}$	$6500$	$728^{\circ}$	$1402^{\circ}$	$14500$	$1397^{\circ}$
$774^{\circ}$	$7000$	$773^{\circ}$	$1445^{\circ}$	$15000$	$1439^{\circ}$

Die ganze Function dritten Grades

$$f(e) = 13,76 e - 0,004841 e^2 + 0,000001378 e^3$$

stellt die Beziehung zwischen  $e$  und  $t$  mit ziemlicher Annäherung in dem Intervall von  $400^{\circ}$  bis  $1440^{\circ}$  dar. Es lohnt nicht, eine noch genauere Formel zu berechnen, da der Unterschied in der thermoelectrischen Kraft verschiedener Drähte die Abweichungen zwischen den beobachteten und berechneten Werthen übersteigt und man für jeden eine neue Formel berechnen müsste. (Vgl. § 6.)

Die Richtung der thermoelectromotorischen Kraft ist folgende: es geht der Strom an der heissen Löthstelle vom Platin zum Platinrhodium.

#### § 6. Vergleichung verschiedener Thermoelemente.

Eine wichtige Aufgabe war es noch, die Angabe verschiedener Thermoelemente selbst miteinander zu vergleichen.

Es kommen einmal Elemente in Betracht, welche aus demselben Drahtstück hergestellt sind; ferner solche, deren Theile aus verschiedenen Drähten bestanden, welche gleiche Zusammensetzung haben sollten, aber unabhängig von einander hergestellt waren. Endlich wurden noch solche Elemente untersucht, bei denen der eine Theil nicht 10 Proc., sondern 9, 11, 20, 30, 40 Proc. Rhodium enthielt. Sämmtliches Material stammt aus der Platinschmelze von W. C. Heräus in



zu prüfen und mit einem Thermoelement zu vergleichen, welches an das Luftthermometer angeschlossen ist.

Die Vergleichung wurde zunächst in der Weise versucht, dass man die Löthstellen der beiden zu vergleichenden Thermoelemente in einem engbegrenzten Theile des Ofens nebeneinander legte. Hierbei wurden die Drähte durch Porzellanröhrchen von einander isolirt und gegen die directen Flammen geschützt. Aber dieselbe Schwierigkeit, welche so oft bei diesen Beobachtungen hervorgetreten war, nämlich selbst in geringer Ausdehnung gleichmässige Temperatur herzustellen, machte sich auch hier geltend. Es wurden deshalb die zu vergleichenden Drähte in einem Punkte sämmtlich zusammengeschweisst, eine Operation, welche im gewöhnlichen Gasgebläse mit einem kleinen mit einem Platinblech bedeckten Hammer ausgeführt wurde. Es konnte dann jede Combination je zweier Drähte zum Stromkreis genommen und ihre thermoelectrische Kraft gemessen werden, während die Enden der übrigen isolirt blieben. Die Drähte wurden durch Porzellantcapillaren isolirt, welche aus dem Ofen herausragten und möglichst weit an die gemeinsame Löthstelle herangingen; diese wurde in reinem Quarzsand eingebettet, sodass die Thermoelemente vollständig vor den Flammen geschützt waren. Bei mehreren Vergleichungen wurden auch zweckmässig die Drähte mit ihren Isolirungen in eine Porzellanröhre gebracht, welche quer durch den ganzen Ofen ging und sie vor den Flammen schützte.

Die thermoelectrische Kraft der zu vergleichenden Elemente wurde nicht genau gleichzeitig, sondern abwechselnd kurz nacheinander gemessen und darauf für gleiche Zeit und Temperatur berechnet. Sowohl bei steigender wie bei fallender Temperatur im Ofen waren die nach dieser Methode gewonnenen Resultate vollständig genau. In der folgenden Tabelle sind die Unterschiede aller Elemente gegen das Thermoelement *A* angegeben, das mit dem Luftthermometer direct verglichen war. Die Elemente *C*<sub>1</sub> und *C*<sub>2</sub> bestanden aus demselben Platin und derselben 10 Proc. Rhodiumlegirung. Letztere war aber verschieden von der des Elements *A*. Die Elemente *D*, *E*, *F*, *G* und *H* bestehen aus Platin und einer Legirung von angeblich 9, 11, 20, 30 und 40 Proc. Rhodium. Das Element *K* bestand aus Platin und reinem Rhodium. Die Vergleichungen









Zur Vergleichung seien hier noch die Bestimmung  
älterer Beobachter angeführt:

	v. d. Weyde (1879)	Pictet (1879)	Violle (1879)	Erhard und Schertel	Ledebur (1881)	Callen (1895)
Gold	1250°	1100°	1035°	1075°	—	1037
Silber	—	—	954°	954°	960°	982
Kupfer	1093°	1050°	1054°	—	1100°	—



110 Atm. getrieben hat. Er hat hierbei übrigens die Methode für Ausdehnung unter constantem Volumen angewandt; diese Methode aber gibt nur für Gase, welche dem Gesetze Mariotte's streng folgen, dieselben Werthe für den Ausdehnungscoefficienten, wie die Methode für Ausdehnung bei constantem Druck. Die von Regnault für dasselbe Gas bei demselben Druck erhaltenen Werthe für den Ausdehnungscoefficienten stimmen ausserdem nicht gut miteinander überein und er führt selbst hinsichtlich der Bestimmungen bei 110 Atm. speciell an <sup>1)</sup> dass er die Werthe in geeigneter Weise combinirt habe, um auch für diesen Druck das Gesetz hervortreten zu lassen. Da nun ausserdem das Wasserstoffgas laut Regnault's eigener Ansicht eine Ausnahme vor dem Gesetze bildet, so habe ich darin ein genügendes Motiv für eine neue Untersuchung des Ausdehnungscoefficienten verdünnter Gase erblickt.

Als ich meinen Entwurf zu einer solchen Untersuchung Herrn Prof. Sundell vorlegte, unterstützte er denselben auf das Wärmste und versprach mir mitzuwirken, namentlich bei der Glasbläserarbeit. Ich benutze diese Gelegenheit um sowohl ihm als auch dem Prof. Lemström, welcher einen Arbeitsplatz und die nöthigen Apparate mir zur Verfügung stellte, meine Erkenntlichkeit auszusprechen.

Meine Absicht war, für eine Anzahl Gase den mittleren Ausdehnungscoefficienten zwischen 0° und 100° C. für einen Druck zwischen 1 Atm. und ca. 5 mm zu bestimmen. Ich wollte bei diesen Versuchen der Controlle wegen zwei Methoden benutzen, welche beide den wahren Ausdehnungscoefficienten der Gase angeben sollten, obschon das Gas bei ihnen sich in verschiedener Weise ausdehnen konnte.

Nach der einen Methode sollte das Gas in dem sogenannten Kochapparat denselben Druck bei 0° und bei 100° beibehalten, das Volumen aber sollte bei der Erwärmung zunehmen. Bei der anderen Methode sollte das Volumen so weit wie möglich constant bleiben, der Druck aber bei der Erwärmung wachsen. Erstere Methode, welche derjenigen Regnault's bei „constantem Druck“ entspricht, lasse ich hier

---

1) l. c. p. 100.













enthaltenen Gases und das Thermometer  $T_1$  die des Gases in der Röhre  $g g'$ .

Der Vergleicher und der Compressor sind beide an an der Wand befestigten Consolen angebracht.

*Verlauf der Untersuchungen.* Nachdem der Apparat mit recht trockenem Gase gefüllt ist, umgibt man den Kolben  $B$  und seinen Hals bis  $c'$  mit schmelzendem Schnee. Kurz darauf unterbricht man die Verbindung mit der Quecksilberpumpe, indem man das Quecksilber im Compressor bis zur Hälfte der Röhre  $g g'$  steigen lässt. Nachdem der Druck im ganzen Apparat gleich geworden ist, hebt man das Reservoir  $R$ , um das Quecksilber des Vergleichers mit den schwarzen Spitzen in Berührung zu bringen.

Beiläufig zwei Stunden später beobachtet man die Thermometer  $T_4, T_3, T_5, T_2, T_1$  in der hier angegebenen Reihenfolge. Darauf bringt man den Druck des Gases im Kochapparat und Compressor genau auf dieselbe Höhe, indem man das Volumen des Gases im Compressor ein wenig verändert, bis die schwarzen Spitzen des Vergleichers gleichzeitig in genauem Contact mit ihrem im Quecksilber reflectirten Bilde erscheinen. Die feinsten Regulirungen des Quecksilbers im Vergleicher geschehen mit Hülfe der Zange  $k$  und man endigt stets, indem man das Quecksilber gleichzeitig in beiden mit dem Vergleicher parallelen Zweigen steigen lässt. Nachdem der Druck im ganzen Apparat gleich gemacht ist, verzeichnet man von neuem die Temperatur der Thermometer in der Reihenfolge  $T_1, T_2, T_5, T_3, T_4$  und darauf diejenige der Thermometer  $T_6$  und  $T_7$  und endlich die Stellung des Quecksilbers in der Röhre  $g g'$ . Alle diese Verrichtungen müssen so schnell als möglich geschehen um die Erwärmung durch die Gegenwart des Beobachters zu vermeiden.

Diese Aufzeichnungen und Manipulationen sind in der selben Reihenfolge zwei- oder dreimal nach einander in Zwischenräumen von 10 bis 15 Minuten auszuführen.

Hiernach giesst man eine bestimmte Quantität Wasse auf den Kolben  $B$ , um den denselben umgebenden Schnee schmelzen zu lassen. Dieser und das durch das Schmelzen des Schnees erzeugte Wasser tröpfelt durch das Netz des inneren Cylinders in den unteren Behälter des Kochapparates







$v_2$  die Capacität beim Nullpunkt des Kolbens  $D$  von  $g$  bis  $f'$ .

$v_3$  Die Capacität beim Nullpunkt der Röhre  $f'f$ .

$v_3'$  Die Capacität beim Nullpunkt des Theiles der Röhre  $f'f$ , welcher mit Gas erfüllt ist, wenn das Niveau des Quecksilbers sich in dieser Röhre befindet. Man hat in jedem einzelnen Falle den Werth dieses veränderlichen Volumens bestimmt durch Ablesen der Lage des Niveaus auf der Spiegelscala  $ff'$ .

$v_4$  die Capacität beim Nullpunkt des Kolbens  $C$  von  $f$  bis  $d'$ .

$v_5$  die Capacität beim Nullpunkt der Kapillarröhre  $dd'$  und des mit Gas gefüllten Theiles der Röhre  $F$  (über der schwarzen Spitze).

$v_6$  die Capacität beim Nullpunkt des mit Gas gefüllten Theils der Röhre  $E$  und der Capillarröhre  $c''c'$  bis zum Schirm  $SS'$ .

$v_7$  die Capacität beim Nullpunkt der Capillarröhre  $c''c'$  von dem Schirm bis  $c'$ .

$v_8$  die Capacität beim Nullpunkt des Kolbens  $B$  bis  $c$  und der Capillarröhre von  $c$  bis  $c'$ . Es sei ferner <sup>1)</sup>

$t_1$  die Temperatur von  $v_1$ , erhalten durch den Durchschnitt aller Ablesungen vom Thermometer  $T_1$  vor und nach der Regulirung des Druckes.

$t_2$  die Temperatur von  $v_2$ , erhalten durch den Durchschnitt der Ablesungen vom Thermometer  $T_2$ .

$t_3$   $t_3'$  die Temperatur vor  $v_3$  oder  $v_3'$  erhalten durch die Durchschnittszahlen der Ablesungen des Thermometers  $T_3$ .

$t_4$   $t_4'$  die Temperaturen von  $v_4$ , erhalten durch die Durchschnittszahlen der Ablesungen des Thermometers  $T_4$ .

$t_5$   $t_5'$  die Temperaturen von  $v_5$ , erhalten durch die Durchschnittszahlen der Ablesungen des Thermometers  $T_5$ .

$t_6$   $t_6'$  die Temperaturen von  $v_6$ , welche mit  $t_5$   $t_5'$  identisch sind.

$t_7$   $t_7'$  die Temperatur von  $v_7$ , erhalten durch die Durchschnittszahlen der Ablesungen der Thermometer  $T_6$  und  $T_7$ .

---

1) Die mit einem Accent versehenen Temperaturen beziehen sich auf den Augenblick, wo das Reservoir des Kochapparates auf dem Siedepunkt gehalten wird; diejenigen ohne Accent auf den Augenblick, wo das Reservoir sich auf dem Nullpunkt befindet.





untereinander communiciren, eingeschlossenen Gases. Man hat, indem man  $t_8 = 0$  setzt,

$$(5) \quad \left\{ M_{II} = \frac{D_0}{p_0} \varphi(p_0) \left[ \frac{v_6(1+\beta t_6)(1+\psi_6(Pp))}{1+\alpha_p t_6} + \frac{v_7(1+\beta t_7)(1+\psi_7(Pp))}{1+\alpha_p t_7} + v_8(1+\psi_8(Pp)) \right] \right\},$$

wo  $\psi_6, \psi_7, \psi_8$  die Coefficienten der Compression der entsprechenden Volumina sind.

Im Augenblick, wo das Reservoir *B* des Kochapparates von Dampf eingehüllt war, befand sich das Niveau des Quecksilbers in der Röhre *ff'* des Compressors. Das Gas füllte folglich in diesem Augenblick die folgenden Volumina:

Links vom Vergleicher:  
Die Volumina  $v_3', v_4', v_5'$ ,  
deren Temperaturen  $t_3', t_4', t_5'$   
waren.

Rechts vom Vergleicher:  
Die Volumina  $v_6', v_7', v_8'$ ,  
deren Temperaturen  $t_6', t_7', t_8'$   
waren.

Der Druck des Gases im Kochapparate war durch die Erhitzung bis zum Werthe  $p'$  gestiegen, man hatte aber gleichzeitig das Gas im Compressor genau bis zu demselben Drucke comprimirt. Man erhielt folglich in diesem Falle einen gemeinschaftlichen Druck für das ganze Gas. Benutzt man nochmals dieselbe Formel (3), so erhält man folgenden Ausdruck für die unveränderlichen Massen  $M_I$  links und  $M_{II}$  rechts vom Vergleicher:

$$(6) \quad \left\{ M_I = \frac{D_0}{p_0} \varphi(p'_0) \left[ \frac{v_3'(1+\beta t_3')(1+\psi_3(Pp'))}{1+\alpha_{p'} t_3} + \frac{v_4(1+\beta t_4')(1+\psi_4(Pp'))}{1+\alpha_{p'} t_4'} + \frac{v_5(1+\beta t_5')(1+\psi_5(Pp'))}{1+\alpha_{p'} t_5'} \right] \right\}$$

$$(7) \quad \left\{ M_{II} = \frac{D_0}{p_0} \varphi(p'_0) \left[ \frac{v_6(1+\beta t_6')(1+\psi_6(Pp'))}{1+\alpha_{p'} t_6'} + \frac{v_7(1+\beta t_7')(1+\psi_7(Pp'))}{1+\alpha_{p'} t_7'} + \frac{v_8(1+\beta t_8')(1+\psi_8(Pp'))}{1+\alpha_{p'} t_8'} \right] \right\}.$$

Die Gleichungen (4) und (6) geben einen Ausdruck für  $\varphi(p'_0) / \varphi(p_0)$ .

Aus den Gleichungen (5) und (7) ergibt sich ein anderer Ausdruck für  $\varphi(p'_0) / \varphi(p_0)$ . Vergleicht man diese beiden Gleichungen miteinander, so erhält man die Gleichung zwischen



Setzt man

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4 = \psi_5 = \psi_6 = \psi_7 \psi_8,$$

so geht diese Function von den Ausdrücken für  $\alpha_p$  und  $K$  ganz aus.

Ist der Ausdehnungscoefficient  $\beta$  des Glases und die Volumina durch vorläufige Versuche bekannt und die Temperaturen direct beobachtet, so kann man  $\alpha_p$  vermittle der Formeln (8) berechnen. Man muss daher den bekannten Werth für  $\alpha_p$  und  $\alpha_p'$  im Gliede rechts einführen. Der durch die Annahme eines und desselben etwas ungenauen Werthes für  $\alpha_p$  und  $\alpha_p'$  begangene Fehler beeinflusst aber ganz unbedeutend das Resultat, falls man den Temperaturwechsel ausserhalb des Kochapparates recht gering annimmt. Man hat zu diesem Zwecke die Ballons *C* und *D* mit wassergefüllten Hüllen umgeben und ausserdem den Arbeitsraum bei möglichst constanter Temperatur erhalten. Um den Fehler infolgedessen, dass der erhaltene Werth von dem im Gliede rechts eingeführten Werth für  $\alpha$  abhängt, möglichst zu reduciren, gilt es immer einen dem wahren Werthe des Coefficienten der dem in Frage stehenden Drucke entsprechenden Ausdehnung des Gases so nahe als möglich kommenden Werth zu finden. Deshalb habe ich in die Berechnung der Versuche bei dem anfänglichen Druck für den Coefficienten der Ausdehnung den nächstliegenden bekannten Werth angenommen. Der Mittelwerth der so erhaltenen Resultate ist der Reihe nach bei der Berechnung der folgenden Versuche eingeführt etc., sodass der Durchschnitt der Ergebnisse der früheren Experimente stets für die Berechnung der folgenden benutzt ward.

Da die Function  $\varphi(p, 0)$  in den Formeln (8) gänzlich fortgelassen ist, kann man daraus die Schlussfolgerung ziehen, dass der für  $\alpha_p$  erhaltene Werth von dem Mariotte'schen Gesetz nicht abhängig ist. Die Art und Weise, in welcher die Formeln 1—8 hergeleitet sind, haben uns übrigens den Beweis geliefert, dass der für  $\alpha_p'$  erhaltene Werth derjenige „Coefficient der Ausdehnung bei constantem Druck“ ist, welcher dem Drucke  $p'$  des zur Temperatur des Siedepunktes des Wassers erhitzten Gases entspricht.

In Betreff der Bestimmungen des Coefficienten der Ausdehnung des Glases, der Messungen der Capacitäten der ver-



$\alpha = 0,0037099$  angewandt. Die Ergebnisse findet man in Tab. III.

*Bestimmung des Ausdehnungscoefficienten von Wasserstoffgas*  
 Letzteres wurde wesentlich nach derselben Methode hergestellt wie von Chappuis bei der Darstellung seines Wasserstoffgas thermometers.<sup>1)</sup> Um das Wasserstoffgas zu trocknen und Luft aus dem Apparate vollständig auszutreiben, wurde eine Verbindung zwischen den verschiedenen Theilen des Apparates hergestellt und der Apparat 15 mal nacheinander ausgepumpt und gefüllt. Das eingelassene Gas ging durch zwei concentrirte Kalilauge enthaltende Trockenflaschen und eine U-förmige horizontale, mit Phosphorsäureanhydrid gefüllte Röhre. Die Beobachtungen beim Anfangsdruck sind berechnet mit Hilfe des Werthes  $\alpha = 0,003651832$ , welchen Chappuis für ein Druck von 999 mm erhalten hat. Die Resultate ergeben sich aus der Tab. IV.

Die Columnen der Tabellen enthalten unter  $p$  den Druck bei  $0^\circ$ , unter  $p'$  den für  $100^\circ$  berechneten Druck in Millimetern, die mittleren Werthe für  $\alpha_{p'}$  und unter  $\Delta$  die wahrscheinlichen Fehler dieser Mittelwerthe.

#### I. Atmosphärische Luft.

$p$	$p'$	$\alpha_{p'}$	$\Delta$
752	1027,7	0,0036660	—
376	513,7	0,0036624	$\pm 0,0000005$
260	355,2	0,0036606	$\pm 0,0000005$
170	232,2	0,0036594	$\pm 0,0000002$
100	136,6	0,0036630	$\pm 0,0000003$
78	106,6	0,0036657	$\pm 0,0000009$
51,8	70,8	0,0036717	$\pm 0,0000008$
29,1	38,8	0,0036853	$\pm 0,0000018$
13,2	18,1	0,0037172	$\pm 0,0000025$
6,6	9,1	0,0037627	$\pm 0,0000022$

#### II. Atmosphärische Luft.

749	1023,4	0,0036642	$\pm 0,0000004$
254	346,9	0,0036580	$\pm 0,0000004$
101	138,0	0,0036634	$\pm 0,0000004$
75	102,5	0,0036645	$\pm 0,0000002$
18,6	25,5	0,0036895	$\pm 0,0000007$
5,8	7,98	0,0037666	$\pm 0,0000021$

1) Chappuis, l. c. p. 135.



einem Drucke entspricht, welcher höher als 1043,6 mm ist. Es ergibt sich bereits aus den Untersuchungen von Andrews, Amagat und Chappuis, dass das Gesetz der Ausdehnung der Gase bei höherem Drucke nicht so einfach ist, wie Regnault annahm. Diese Forscher haben gefunden, dass der Ausdehnungscoefficient auch bei Temperaturänderungen verschieden ist. Andrews hat z. B. zugleich gezeigt, dass der Ausdehnungscoefficient der Kohlensäure bei einer Temperaturänderung von 64° C. bis 100° C. ein Maximum bei einem Drucke von 145,5 Atmosphären hat.

Helsingfors, 5. September 1892.





Die so gefundene Zahl ist 80,025. ausgedrückt in mittleren Grammc calorien.<sup>1)</sup>

Setzt man diese beiden Zahlen. wie auch  $S_r = 0,99987$ ,  $S_q = 13,5953$ ,  $W = 1$  in (1) ein, so bekommen wir  $\mu = 15,41$  mgr.

Man erhält natürlich  $\mu$  direct bei jeder Aichung eines Eiscalorimeters, indem man das Gewicht des eingesaugten Quecksilbers durch die vorher bekannte zugeführte Wärmemenge dividirt. Die auf diesem Wege von verschiedenen Forschern erhaltenen Zahlen stimmen aber keineswegs mit der oben angeführten Zahl überein, wie es folgende kurze Zusammenstellung beweist: Schuller und Wartha<sup>2)</sup> finden 15,44 mgr, Than<sup>3)</sup> beobachtet 15,42; Velten<sup>4)</sup> 15,45 bis 15,50; ich<sup>5)</sup> fand 15,57 (als Mittelwerth von 15,56 bis 15,58), Staub<sup>6)</sup> endlich gibt sogar 15,26 an.

Diese Zahlen gehen zu stark auseinander, und ich glaube es für ausgeschlossen halten zu dürfen, die ganze Divergenz. der immer doch sorgfältig angestellten Versuche nur auf zufällige oder gar Beobachtungsfehler zurückzuführen. Es erscheint vielmehr wahrscheinlicher, dass die Annahme der Constanz und Unveränderlichkeit der Schmelzwärme, oder des specifischen Gewichtes, oder auch beider dieser Grössen nicht zutreffend ist. Wir wissen, dass die Schmelzwärme des Eises mit dem Drucke, unter welchem das Schmelzen vor sich geht, sich ändern muss,

1) Ich will hier nicht unerwähnt lassen, dass in der Definition der Wärmeeinheit ein Missverständniss in Bunsen's oben citirter Abhandlung vorkommt. Er sagt nämlich ausdrücklich (p. 2) „... in Calorien, als deren Einheit im Folgenden stets die Wärmemenge angenommen ist, welche 1 gr Wasser von 0° C. aufnimmt, um sich auf 1° C. zu erhitzen . . .“ und weiter (p. 191) „... um die specifische Wärme einer Substanz zu ermitteln, ist es am einfachsten, die Wärmemenge in Scalentheilen ein- für allemal zu bestimmen, welche 1 gr Wasser bei seiner Abkühlung von 1° C. auf 0° C. abgibt. . .“ Aus den Versuchen (p. 23) ersieht man aber, dass er sich eigentlich der mittleren Grammc calorie bedient.

2) Schuller und Wartha, Wied. Ann. 2. p. 359. 1877.

3) Than, Wied. Ann. 13. p. 84. u. 14. p. 393. 1881.

4) Velten, Wied. Ann. 21. p. 31. 1881.

5) Zakrzewski, Bull. de l'Acad. des Sciences de Cracovie. April 1891. Es soll hier bemerkt werden, dass in meinem Apparate auf dem Eise ein Druck von etwa 60 cm Quecksilber lastete.

6) Staub, Inaug.-Dissert. Zürich. 1890.



Abweichungen der einzelnen Beobachtungen betragen nämlich bei ihm bis 0,00015, was in  $\mu$  schon eine Differenz von 0,03 mg bewirkt.

Im Folgenden will ich nun einige Bestimmungen des specifischen Gewichtes des Eises beschreiben, bei denen ich die Methode derart verfeinert habe, dass die Ergebnisse der Messungen die gewünschte Präcision völlig erreicht haben. Die Vorzüge der Form, welche ich dem Apparate gegeben habe, gegenüber der ursprünglichen Gestalt bei Bunsen, bestehen in Folgendem: Erstens ist das Gewicht sowohl des

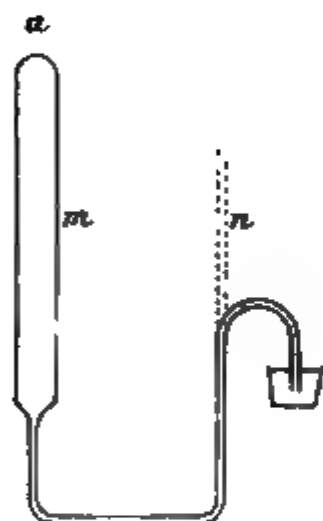


Fig. 1.

also auch die Gewichtsbestimmung des zu gefrierenden Wassers mit grösserer Genauigkeit ausführbar; zweitens vermeidet man die Verwendung eines immer unsicheren Absperrens des Quecksilbers durch einen Korkstöpsel und eines Gummischlauches beim Auskochen des Wassers, der durch längeres Verweilen in siedendem Wasser dessen Reinheit beeinflussen kann; drittens endlich wird die Temperatur

während der ganzen Zeit des Gefrierens regulirbar und genau angebbar.

Der Apparat selbst ist in Fig. 1 *a* und *b* abgebildet. Eine dünnwandige Glasröhre *m* von 14 cm Höhe und 1,5 bis 1,8 cm Durchmesser ist an eine 1 mm weite Capillare angeschmolzen, die anfänglich zweimal unter rechtem Winkel gebogen ist, wie in der Zeichnung durch punktirte Linien angedeutet. In diese werden einige Kubikcentimeter Quecksilber und etwa ein Drittel des Volumens destillirtes Wasser eingesaugt, sodann wird sie vertical mit der Spitze *n* nach unten aufgestellt, die Spitze in kochendes destillirtes Wasser getaucht und das Wasser in *m* in heftiges Sieden versetzt. Nachdem fast alles Wasser verdampft ist, wird die Flamme abgestellt und nun füllt sich das



Es ist dies eine etwa 1,5 l fassende Glasflasche mit a gesprengtem Boden und ziemlich weitem, ganz kurz a geschnittenem Halse. Auf den Hals ist ein kurzes Stück ein Gummischlauches aufgeschoben, der so weit ist, dass ihn c Röhre *m* wasserdicht schliesst, während er doch mit sanft Reibung verschiebbar bleibt.

In diesem Thermostaten befindet sich die Kältemischung aus Wasser, Kochsalz und fein gestossenem Eise, ein Rührer durch einen Wassermotor etwa 30mal in der Minute h wegt wird und ein Thermometer nach Beckmann mit ein Theilung in  $0,01^{\circ}\text{C}$ ., dessen Nullpunkt vor dem Versuche sorgfältig bestimmt wurde. Bei einiger Uebung und genügend Sorgfalt lässt sich die Temperatur der Mischung durch a mähliches Zusetzen von Eis und Salz stundenlang fast constant erhalten. In einem Versuche z. B., in welchem etwa 23,8 g Wasser bei  $-0,7^{\circ}\text{C}$ . zum Gefrieren gebracht werden sollten, betrugen die Schwankungen derselben während über 7 Stunden höchstens  $0,01^{\circ}\text{C}$ .

Das Gefrieren ging sehr langsam, aber regelmässig vor sich, von den Wänden der Röhre aus gegen die Axe derselben, um welche sich ein mehr oder weniger stumpfer, an der Spitze nach aufwärts gerichteter Conus bildete. Stufe weise wurde die Röhre immer tiefer in den Thermostat geschoben, wobei ihr unteres Ende immer mit Eis umhüllt blieb, bis endlich alles Wasser gefroren war und einen wasserhellen Eiscylinder bildete. Das Ende des Gefrierens wurde auf die Weise beobachtet, dass das Quecksilbernäpfchen etwas tiefer gestellt wurde, sodass die Spitze der Capillare neben dem Niveau des Quecksilbers stand; bemerkte man nun, dass das Ausfliessen des Quecksilbers gänzlich aufhörte, so wurde die Temperatur noch eine halbe Stunde constant erhalten nachher das Näpfchen durch ein anderes, ebenfalls gewogen ersetzt, der Apparat aus der Kältemischung herausgenommen das Eis durch Strahlung einer Gasflamme geschmolzen und endlich das Ganze wiederum mit Eis umgeben und durch eine Stunde stehen gelassen. Der Gewichtszuwachs des ersten und die Gewichtsverminderung des zweiten Näpfchens differirte gewöhnlich nur um wenige Milligramme; zur Berechnung wurde der Mittelwerth genommen, dem noch eine kleine Correctur



Weitere Untersuchung über den Einfluss, welchen äußere Umstände, wie Druck oder niedrigere Temperatur beim Einfrieren, wie auch längeres Verbleiben des frisch entstandenen Eises in der Temperatur Null Grad, auf das specifische Gewicht desselben ausüben können, muss ich mir für spätere Zeit vorbehalten. Auf Grund der angeführten Versuche lässt sich mit ziemlicher Sicherheit hoffen, dass selbst sehr kleine Änderungen, wenn solche überhaupt existiren, sich mittel der beschriebenen Methode nachweisen lassen werden.

Zum Schlusse will ich noch die Bemerkung machen, es keineswegs angezeigt erscheint, bei Anwendung des calorimeters von Bunsen ein anscheinend zuverlässigeres fremden Beobachtungen entnommenes calorimetrisches Resultat als silberäquivalent der mittleren Grammcallee anzunehmen, man sich vielmehr der Mühe der experimentellen Bestimmung desselben von neuem unterziehen sollte.

Berlin, Physikal. Institut der Univ., Juni 1892.

---



























Zum Schlusse möchte ich die Werthe der specifischen Volumina, wie sie sich aus dem Vorhergehenden für die reinen allotropen Modificationen ergeben würden, zusammenstellen, bezogen auf das Volumen des flüssigen Schwefels bei 120° C.

	Monoklin	Flüssig	Plastisch
- 20	—	0,935	—
0	0,915	0,943	—
+ 20	0,919	0,951	—
40	0,924	0,960	0,974
60	0,929	0,969	0,979
80	0,935	0,979	—
100	0,941	0,9889	—
120	—	1,0000	0,995
140	—	1,0117	1,001
160	—	—	1,007
180	—	—	1,014
200	—	—	1,021

Ich möchte nicht verabsäumen an dieser Stelle Hrn. Geheimrath Wiedemann für die freundliche Unterstützung bei Ausführung dieser Arbeit meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Physik. Inst. der Univ. Leipzig.



Verhältnisse erbeblich complicirter zu sein. Kennt man den Durchmesser einer solchen, so ist doch damit die Form der äussersten Theile noch immer unbestimmt, diese können ja wohl die mannichfachsten Verschönerungen in der Form aufweisen. Auch bildet sich die Erscheinung nicht nur an einer bestimmten Stelle, sondern zieht einen gewissen Theil der Electroden, indem es in Punkten auftritt, an denen das zur Einleitung der Entladung nöthige Potential überschritten wird. Auch hat man es mit einer bestimmten Explosionsspannung zu thun, sondern jede, die zwischen dem von Röntgen sogenannten Minimumpotential und dem Funkenpotential für die betreffende Gasart liegt, kann Entladungen bedingen. Eine nähere Einsicht in die hier obwaltenden Verhältnisse dürfte daher wohl ein Grund sehr umfassender Untersuchungen zu erlangen. Die interessanten Resultate des Hrn. v. Obermeyer lassen sich auch mit einem Electrometer, das nur relative Messungen gestattet, wie mir scheint, erhalten können, schon ein einfaches electrisches Pendel, wie ich es benutzt, gestattet es zu prüfen, wie weit einem constanten Producte  $p\delta$  dieselbe Potentialdifferenz entspricht.

Berlin, 9. Juli 1892.





















24

60°	65°	70°
-----	-----	-----

- 1,2	-	-
- 8,4	-	-
- 2,6	-	-
- 10,4	-	-

- 5,9	-	+ 0,7
- 8,9	-	+ 19,0
- 8,2	-	+ 12,3

+ 55,0	+ 59,6	-
+ 58,7	+ 73,3	-
+ 160,2	+ 196,8	-

+ 55,5	+ 61,4	-
+ 66,4	+ 79,8	-
+ 77,8	+ 91,3	-





Prismenwinkel und  $\alpha$  die durch das Prisma bewirkte Ablenkung bedeuten.

§. 17. Zunächst ergibt sich aus der v. Helmholtz'schen Theorie, wie schon Wernicke<sup>1)</sup> und Kirchhoff<sup>2)</sup> bewiesen haben:

$$(3) \quad n'^2 = \frac{1}{2} \{ n_0^2 - g^2 + \sin^2 i + \sqrt{4 n_0^2 g^2 + (n_0^2 - g^2 - \sin^2 i)^2} \}.$$

Dieselbe Gleichung muss aus jeder Theorie einfach abzuleiten sein, welche überhaupt die Absorption in Betracht zieht. Die Gleichung A (§ 7) gilt nun auch für absorbierende Substanzen, wofern dort an Stelle von  $n$  obiger Ausdruck für  $n'$  eingesetzt wird. Man erhält, wenn man diese Substitution ausführt, die in  $\alpha$  explicite Gleichung:

$$(B) \quad \begin{cases} \sin \alpha = -\sin(\beta - i) \sqrt{1 - (\cos \beta \sin i - \sin \beta} \\ \sqrt{\frac{1}{2} [n_0^2 - g^2 - \sin^2 i + \sqrt{4 n_0^2 g^2 + (n_0^2 - g^2 - \sin^2 i)^2}]^2} \\ - \cos(\beta - i) (\cos \beta \sin i - \sin \beta \sqrt{\frac{1}{2} [n_0^2 - g^2 - \sin^2 i} \\ + \sqrt{4 n_0^2 g^2 + (n_0^2 - g^2 - \sin^2 i)^2}]) \}. \end{cases}$$

Da die Durchführung der Rechnung nach dieser Gleichung nicht gerade bequem ist, werden wir versuchen, einen einfacheren Ausdruck aufzustellen

§ 18. Aus der Gleichung ((2) § 7) erhält man unmittelbar

$$(4) \quad \begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \sin \beta \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{\cos i} - \cos \alpha \sin \beta \\ - (\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta + \cos \beta) \operatorname{tg} i \end{cases}$$

Da  $\alpha$  und  $\beta$  nur wenige Secunden betragen, darf man  $\cos \alpha$  und  $\cos \beta$  gleich Eins setzen. Es wird dann

$$\sin \alpha = \sin \beta \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{\cos i} - \sin \beta - \sin \alpha \sin \beta \operatorname{tg} i.$$

Das Glied  $\sin \alpha \sin \beta \operatorname{tg} i$  bleibt sehr klein gegen  $\sin \alpha$ , bis  $i$  sich  $90^\circ$  nähert; daher darf man als Annäherung schreiben

$$\sin \alpha = \sin \beta \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{\cos i} - \sin \beta,$$

1) Wernicke, Pogg. Ann. 159. p. 198. 1876.

2) Kirchhoff, Math. Optik. p. 173—177. Leipzig 1891.



$$\alpha = \beta \left\{ \frac{1}{\cos i} \sqrt{\left( n_0^2 \left\{ 1 - \frac{\sin^2 i}{2 n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)} \right\}^2 + \frac{1}{2} \left[ \frac{2 \sin^2 i}{1 + g^2/n_0^2} \left( 1 - \frac{\sin^2 i}{4 n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)} - \frac{1 + g^2/n_0^2}{2} - \frac{n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)^2}{2 \sin^2 i} \right) \right] \right)} - 1 \right\}.$$

Diesen Ausdruck kann man ohne weiteres in die Form

$$(7) \quad \left\{ \alpha = \beta \left\{ \frac{1}{\cos i} \sqrt{\left( n_0^2 \left\{ 1 - \frac{\sin^2 i}{2 n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)} \right\}^2 + \left[ \frac{\sin^2 i}{1 + g^2/n_0^2} \left( 1 - \frac{\sin^2 i}{4 n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)} \right) \right] \right)} - 1 \right\} \right.$$

bringen, und wenn man noch

$$\frac{\sin^2 i}{1 + g^2/n_0^2} \left( 1 - \frac{\sin^2 i}{4 n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)} \right)$$

gleich Null setzt<sup>1)</sup>, so wird

$$(D) \quad \alpha = \beta \left\{ \frac{n_0}{\cos i} \left( 1 - \frac{\sin^2 i}{2 n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)} \right) - 1 \right\}.$$

Diese Gleichung gibt die berechneten Werthe von  $\alpha$  algebraisch zu klein. Bezeichnet man nämlich die Differenz zwischen den addirten und subtrahirten Grössen

$$\left\{ \frac{\sin^2 i}{1 + g^2/n_0^2} \left( 1 - \frac{\sin^2 i}{4 n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)} \right) - \left[ \sqrt{n_0^4 (1 + g^2/n_0^2)^2 + 2 n_0^2 \sin^2 i + 2 n_0^2 g^2/n_0^2 \sin^2 i + \sin^4 i} - \sqrt{4 n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)^2 + 2 n_0^2 g^2/n_0^2 \sin^2 i - 2 n_0^2 \sin^2 i + \sin^4 i} \right] \right\}$$

mit  $d$ , so ergibt sich, dass  $d$  annähernd gleich dem Ausdruck

$$\frac{3 \sin^4 i}{n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)}$$

ist, d. h. der subtrahirte Ausdruck ist ein wenig grösser als

---

1) Der Werth von

$$\frac{\sin^2 i}{1 + g^2/n_0^2} \left( 1 - \frac{\sin^2 i}{4 n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)} \right)$$

ist bei Silber etwa  $1/60$  des Gesamtwertes unter dem Wurzelzeichen bei Nickel  $1/30$ .



aufgestellt. Wenn man diesen Ausdruck für  $\kappa'$  an Stelle von  $\kappa$  in die Gleichung (5) einsetzt, so erhält man sofort

$$\alpha = \beta \left\{ \frac{n_0}{\cos i} - 1 \right\},$$

welche Beziehung wieder mit Gleichung (E) identisch ist.

§ 21. Die bisherigen Rechnungen sind rein algebraischer Natur und verloren allmählich jegliche physikalische Anschaulichkeit, wenn auch eine solche den ersten Ansätzen der Theorie innegewohnt haben mag. Anlässlich der mit der Prismenmethode schon erhaltenen Resultate hat Hr. H. A. Lorentz<sup>1)</sup> eine directe Ableitung für diesen Specialfall gegeben, wobei gerade jener Standpunkt möglichst gewahrt wird. Ausgangspunkt dieser inzwischen veröffentlichten, mir vom Verfasser vorher gütigst zur Verfügung gestellten Rechnung bilden einige völlig allgemeine und einwandfreie Ansätze, die in einfacher Weise zu folgender Gleichung für die Ablenkung führen:

$$\alpha = \beta \left\{ -1 + \operatorname{tg} i \sqrt{\left[ -\frac{(\kappa^2 - 1)n_0^2}{2 \sin^2 i} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{(\kappa^2 + 1)^2 n_0^4}{\sin^4 i} + 2 \frac{(\kappa^2 - 1)n^2}{\sin^2 i} + 1 \right)} \right]} \right\}$$

(a. a. O. § 14, Gleichung (21)), welche sich leicht so umformen lässt, dass sie mit unserer Gleichung (C) identisch wird. Am Ende desselben § 14 gibt Hr. Lorentz dann noch zwei Gleichungen, welche mit unseren (D), bez. (E) ohne weiteres übereinstimmen.

#### Vergleich mit den Beobachtungen.

§ 22. Um die gefundenen Gleichungen anzuwenden, braucht man die Werthe von  $g$  und von  $n_0$ . Die Grösse  $g$  ist schon von Wernicke<sup>2)</sup> und Rathenau<sup>3)</sup> direct gemessen worden. Abgesehen von älteren Autoren hat Hr. Rubens<sup>4)</sup> sie aus Bestimmungen des Reflexionsvermögens, und Hr. Drude<sup>5)</sup> aus Messungen der Reflexionsparameter berechnet. Aus der

1) H. A. Lorentz, Wied. Ann. 46. p. 244. 1892.

2) Wernicke, Pogg. Ann. Erg.-Bd. 8. p. 75. 1878.

3) Rathenau, Inaug.-Dissert. Berlin 1889.

4) Rubens, Wied. Ann. 37. p. 267. 1889.

5) Drude, Wied. Ann. 39. p. 481. 1890.



Tabelle 4.

Incidenz	Gold	Silber	Kupfer	Platin	Nickel	Eisen	Cobalt
	$g = 2.16$ $\lambda = 65$	$g = 1.79$ $\lambda = 65$	$g = 2.61$ roth (C)	$g = 2.03$ $\lambda = 65$	$g = 2.06$ $\lambda = 65$	$g = 1.78$ $\lambda = 65$	$g = 4.19$ $\lambda = 63$
	Rathenau	Rathenau	Rubens	Rathenau	Rathenau	Rathenau	Drude
	$n_0$						
0°	0.27	0.22	0.45	2.01	1.98	3.01	2.99
10°	0.33	0.31	—	—	—	—	—
20°	0.27	0.40	0.48	—	—	—	—
30°	0.22	0.38	0.49	1.90	2.00	3.12	3.12
40°	0.23	0.41	0.50	1.95	2.02	2.98	3.12
50°	0.26	0.38	0.51	2.04	1.96	3.13	3.24
55°	—	—	—	2.02	2.01	3.00	3.35
60°	0.24	0.35	0.46	2.06	2.06	2.99	3.15
65°	—	—	—	1.97	2.02	2.98	3.18
70°	—	—	0.48	—	—	—	—
Mittel	0.26	0.35	0.48	1.99	2.01	3.03	3.16

Man sieht, dass für jedes Metall die Werthe von  $n_0$ , aus den verschiedenen Incidenzen berechnet, befriedigend übereinstimmen, ausser bei Silber, wo  $n_0$  aus  $i = 0^\circ$  bedeutend kleiner erscheint als aus höheren Incidenzen berechnet. Jedenfalls lassen die Abweichungen keinerlei Gesetzmässigkeit erkennen.

§ 23. In Tab. 5 sind die beobachteten und berechneten Werthe von  $\alpha$  zusammengestellt. Die als beobachtet bezeichneten Zahlen sind die Mittel aus den einzelnen in Tab. 3 eingetragenen, und die als berechnet bezeichneten sind die mit Hülfe der Gleichungen (B), (C), (D) und (E) berechneten Werthe von  $\alpha$ , wenn als  $\beta$  die Mittel aus den brechenden Winkeln der Prismen eines jeden Metalls in Tab. 3, und als  $n_0$  die Mittel in Tab. 4 und als  $g$  die von Hrn. Rathenau und von Hrn. Rubens gefundenen Werthe zur Berechnung verwendet sind. In die letzte horizontale Zeile unter jedem Metalle sind noch die nach der Gleichung (A), also nach dem Snellius'schen Gesetz berechneten Werthe von  $\alpha$  eingetragen.

Dass die Theorie in der That die beobachteten Erscheinungen vollständig wiedergibt, lässt Tab. 5 zweifellos erkennen. Es stimmen die mittels der Gleichung (B) ( $g$  nach Rubens oder Drude) berechneten Werthe von  $\alpha$  fast genau mit den beobachteten überein. Liegen die von Rathenau gefundenen Werthe von  $g$  der Rechnung zu Grunde





$\lambda = 64 \cdot 10^{-7}$

	Incidenz	0°	
Gold $\beta = 25,7''$ $n_0 = 0,26$	$\alpha$ beobachtet $\alpha$ ber. $\left\{ \begin{array}{l} B \\ B \\ C \\ D \\ E \\ A \end{array} \right\} \begin{array}{l} g = 2,91 \text{ (Rubens)} \\ \\ g = 2,16 \text{ (Rathenau)} \\ \\ \text{(Snellius)} \end{array}$	 - 18,9'' - 19,1 - 19,1 - 19,1 - 19,1 - 19,1	 . . . . . .
Silber $\beta = 18,1''$ $n_0 = 0,35$	$\alpha$ beobachtet $\alpha$ ber. $\left\{ \begin{array}{l} B \\ B \\ C \\ D \\ E \\ A \end{array} \right\} \begin{array}{l} g = 3,46 \text{ (Rubens)} \\ \\ g = 1,79 \text{ (Rathenau)} \\ \\ \text{(Snellius)} \end{array}$	 - 14,1 - 11,8 - 11,8 - 11,8 - 11,8 - 11,8	 - - - - - -
Kupfer $\beta = 33,7''$ $n_0 = 0,48$	$\alpha$ beobachtet $\alpha$ ber. $\left\{ \begin{array}{l} B \\ C \\ D \\ E \\ A \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ g = 2,61 \text{ (Rubens)} \\ \\ \text{(Snellius)} \end{array}$	 - 18,5 - 17,5 - 17,5 - 17,5 - 17,5	 . . . . .
Platin $\beta = 21,9''$ $n_0 = 1,99$	$\alpha$ beobachtet $\alpha$ ber. $\left\{ \begin{array}{l} B \\ B \\ C \\ D \\ E \\ A \end{array} \right\} \begin{array}{l} g = 4,17 \text{ (Drude)} \\ \\ g = 2,03 \text{ (Rathenau)} \\ \\ \text{(Snellius)} \end{array}$	 + 22,1 + 21,7 + 21,7 + 21,7 + 21,7 + 21,7	 . . . . . .
Nickel $\beta = 30,1''$ $n_0 = 2,01$	$\alpha$ beobachtet $\alpha$ ber. $\left\{ \begin{array}{l} B \\ B \\ C \\ D \\ E \\ A \end{array} \right\} \begin{array}{l} g = 3,79 \text{ (Rubens)} \\ \\ g = 2,06 \text{ (Rathenau)} \\ \\ \text{(Snellius)} \end{array}$	 + 29,8 + 30,4 + 30,4 + 30,4 + 30,4 + 30,4	 . . . . . .

lle 5.

30°	40°	50°	55°	60°	65°	70°
— 19,4	— 18,2	— 15,6	—	— 14,3	—	—
— 18,2	— 17,2	— 15,2	—	— 13,0	—	—
— 18,4	— 17,6	— 16,2	—	— 13,6	—	—
— 18,4	— 17,5	— 16,0	—	— 13,4	—	—
— 18,4	— 17,5	— 16,0	—	— 13,5	—	—
— 18,0	— 17,0	— 15,3	—	— 12,4	—	—
—	—	—	—	—	—	—
— 10,1	— 8,7	— 7,7	—	— 5,5	—	—
— 10,8	— 9,9	— 8,3	—	— 5,5	—	—
— 11,4	— 10,9	— 10,8	—	— 7,4	—	—
— 11,2	— 10,5	— 9,3	—	— 6,7	—	—
— 11,2	— 10,6	— 9,4	—	— 6,9	—	—
— 10,8	— 9,9	— 8,3	—	— 5,4	—	—
Tot. Reflex.	—	—	—	—	—	—
— 15,0	— 12,4	— 7,8	—	— 4,3	—	+ 10,7
— 15,4	— 13,2	— 9,5	—	— 3,1	—	+ 10,7
— 15,4	— 13,1	— 9,3	—	— 3,0	—	+ 10,9
— 15,4	— 13,1	— 9,4	—	— 3,2	—	+ 10,8
— 15,0	— 12,6	— 8,5	—	— 1,3	—	+ 13,6
Tot. Reflex.	—	—	—	—	—	—
+ 25,9	+ 33,4	+ 46,5	+ 54,0	+ 66,6	+ 75,5	—
+ 28,1	+ 34,4	+ 44,9	+ 52,8	+ 65,8	+ 79,1	—
+ 27,2	+ 32,5	+ 40,2	+ 48,4	+ 60,4	+ 71,7	—
+ 27,2	+ 32,5	+ 42,4	+ 48,9	+ 60,9	+ 73,0	—
+ 27,2	+ 32,5	+ 42,4	+ 48,9	+ 60,9	+ 72,5	—
+ 28,3	+ 34,9	+ 45,8	+ 54,0	+ 67,4	+ 81,1	—
+ 26,8	+ 31,9	+ 40,6	+ 47,2	+ 56,5	+ 69,8	—
+ 39,3	+ 48,3	+ 60,4	+ 73,6	+ 91,3	+ 110,6	—
+ 39,3	+ 48,1	+ 62,5	+ 73,5	+ 88,4	+ 109,9	—
+ 39,3	+ 48,0	+ 62,1	+ 72,5	+ 86,3	+ 106,2	—
+ 39,3	+ 48,0	+ 62,2	+ 72,8	+ 87,1	+ 107,3	—
+ 39,3	+ 48,0	+ 62,2	+ 72,8	+ 87,1	+ 106,7	—
+ 39,8	+ 48,9	+ 64,1	+ 75,4	+ 91,0	+ 113,1	—
+ 37,6	+ 44,8	+ 56,9	+ 66,3	+ 79,2	+ 97,7	—

∞  
∞  
+ 5533,0

$$\lambda = 64.10^{-6}$$

		Incidenz	0°	10°	
Gold $\beta = 25''$ $n_0 = 0,26$ $g = 2,16$ (Rathenau)	" beobachtet		- 18,3''	- 16,7	-
	Wahrscheinliche Fehler		$\pm 1,2''$	1,1	-
	" berechnet	B	- 18,5	- 18,4	-
		C	- 18,5	- 18,4	-
		D	- 18,5	- 18,4	-
		E	- 18,5	- 18,4	-
		A	- 18,5	- 20,1	Tot
Silber $\beta = 25''$ $n_0 = 0,35$ $g = 1,79$ (Rathenau)	" beobachtet		- 19,5	- 17,2	-
	Wahrscheinliche Fehler		$\pm 1,5$	1,3	-
	" berechnet	B	- 16,2	- 16,2	-
		C	- 16,2	- 16,1	-
		D	- 16,2	- 16,1	-
		E	- 16,2	- 16,1	-
		A	- 16,2	- 17,3	-
Kupfer $\beta = 25''$ $n_0 = 0,48$ $g = 2,61$ (Rubens)	" beobachtet		- 13,7	—	-
	Wahrscheinliche Fehler		$\pm 1,1$	—	-
	" berechnet	B	- 13,0	—	-
		C	- 13,0	—	-
		D	- 13,0	—	-
		E	- 13,0	—	-
		A	- 13,0	—	-
Platin $\beta = 25''$ $n_0 = 1,99$ $g = 2,03$ (Rathenau)	" beobachtet		+ 25,2	—	-
	Wahrscheinliche Fehler		$\pm 1,1$	—	-
	" berechnet	B	+ 24,8	—	-
		C	+ 24,8	—	-
		D	+ 24,8	—	-
		E	+ 24,8	—	-
		A	+ 24,8	—	-
Nickel $\beta = 25''$ $n_0 = 2,01$ $g = 2,06$ (Rathenau)	" beobachtet		+ 24,7	—	-
	Wahrscheinliche Fehler		$\pm 1,2$	—	-
	" berechnet	B	+ 25,2	—	-
		C	+ 25,2	—	-
		D	+ 25,2	—	-
		E	+ 25,2	—	-
		A	+ 25,2	—	-
Eisen $\beta = 25''$ $n_0 = 3,02$ $g = 1,78$ (Rathenau)	" beobachtet		+ 50,2	—	-
	" berechnet	B	+ 50,7	—	-
		C	+ 50,7	—	-
		D	+ 50,7	—	-
		E	+ 50,7	—	-
		A	+ 50,7	—	-
			-		
Cobalt $\beta = 25''$ $n_0 = 2,6$ (Drude)	" beobachtet		+ 49,9	—	-
	" berechnet	B	+ 54,0	—	-
		C	+ 54,0	—	-
		D	+ 54,0	—	-
		E	+ 54,0	—	-
		A	+ 54,0	—	-
			-		

Tabelle 6.

	40°	50°	55°	60°	65°	70°	80°	90°
8	— 17,6	— 15,2	—	— 13,9	—	—	—	—
2	1,6	1,4	—	0,8	—	—	—	—
8	— 17,2	— 18,8	—	— 13,2	—	— 7,9	+ 7,5	+ 1546,0
8	— 17,1	— 15,6	—	— 12,9	—	— 7,4	+ 8,8	∞
8	— 17,1	— 15,6	—	— 13,0	—	— 7,8	+ 8,6	∞
8	— 16,5	— 14,9	—	— 12,0	—	— 6,0	+ 12,4	∞
	—	—	—	—	—	—	—	—
9	— 11,6	— 10,5	—	— 7,6	—	—	—	—
9	1,2	1,2	—	1,5	—	—	—	—
5	— 14,7	— 13,0	—	— 9,3	—	— 3,0	+ 17,8	+ 1867,0
4	— 14,4	— 12,5	—	— 8,8	—	— 2,4	+ 18,1	∞
4	— 14,5	— 12,7	—	— 9,1	—	— 2,8	+ 18,1	∞
1	— 13,6	— 11,5	—	— 7,6	—	+ 0,6	+ 24,4	∞
x	—	—	—	—	—	—	—	—
1	— 9,2	— 5,8	—	— 3,2	—	+ 7,9	—	—
2	1,2	1,2	—	1,2	—	2,7	—	—
4	— 9,9	— 7,3	—	— 2,5	—	+ 7,5	+ 38,3	+ 2118,0
4	— 9,8	— 7,1	—	— 2,2	—	+ 7,9	+ 39,4	∞
4	— 9,8	— 7,2	—	— 2,4	—	+ 7,7	+ 38,9	∞
1	— 9,3	— 6,3	—	— 1,0	—	+ 10,1	+ 44,1	∞
x	—	—	—	—	—	—	—	—
5	+ 38,1	+ 53,1	+ 61,8	+ 76,1	+ 88,6	—	—	—
5	2,4	1,6	1,6	1,5	4,2	—	—	—
2	+ 37,4	+ 48,2	+ 56,0	+ 69,5	+ 82,3	+ 107,4	+ 237,0	+ 4227,0
2	+ 37,4	+ 48,4	+ 56,5	+ 70,0	+ 83,9	+ 109,7	+ 244,8	∞
2	+ 37,4	+ 48,4	+ 56,5	+ 70,0	+ 83,9	+ 109,7	+ 244,3	∞
4	+ 39,9	+ 52,4	+ 61,7	+ 77,0	+ 92,7	+ 120,4	+ 261,5	∞
5	+ 36,5	+ 46,4	+ 54,0	+ 64,6	+ 79,8	+ 103,1	+ 223,0	+ 4187,0
5	+ 40,2	+ 50,1	+ 61,1	+ 75,8	+ 91,8	—	—	—
2	1,5	1,9	2,2	2,6	3,6	—	—	—
3	+ 39,8	+ 51,5	+ 60,1	+ 71,4	+ 87,6	+ 112,6	+ 246,7	+ 4474,0
3	+ 39,8	+ 51,6	+ 60,4	+ 72,2	+ 88,7	+ 114,6	+ 251,8	∞
3	+ 39,8	+ 51,6	+ 60,4	+ 72,2	+ 88,7	+ 114,6	+ 248,4	∞
9	+ 40,6	+ 53,2	+ 62,6	+ 75,5	+ 93,9	+ 121,9	+ 264,4	∞
2	+ 37,2	+ 47,2	+ 55,0	+ 65,7	+ 81,1	+ 104,7	+ 227,0	+ 4220,0
9	+ 71,3	+ 95,8	+ 104,4	+ 122,3	+ 149,7	—	—	—
	+ 72,7	+ 90,6	+ 103,4	+ 121,3	+ 146,3	+ 184,6	+ 391,0	+ 5526,0
	+ 72,7	+ 90,8	+ 103,7	+ 121,9	+ 147,3	+ 186,2	+ 394,9	∞
	+ 72,7	+ 90,8	+ 103,7	+ 121,9	+ 147,3	+ 186,2	+ 394,0	∞
	+ 73,9	+ 92,8	+ 107,0	+ 126,5	+ 154,2	+ 196,5	+ 411,0	∞
	+ 71,6	+ 88,9	+ 101,7	+ 119,5	+ 145,0	+ 184,0	+ 385,0	+ 5406,0
3	+ 76,5	+ 100,1	+ 119,7	+ 131,3	+ 161,4	—	—	—
9	+ 77,6	+ 97,0	+ 111,6	+ 131,3	+ 159,3	+ 202,1	+ 422,0	+ 5655,0
9	+ 77,6	+ 97,1	+ 111,7	+ 131,7	+ 160,2	+ 203,7	+ 425,7	∞
9	+ 77,6	+ 97,1	+ 111,7	+ 131,7	+ 160,2	+ 203,7	+ 425,1	∞
9	+ 78,1	+ 97,9	+ 112,7	+ 133,0	+ 161,9	+ 205,9	+ 429,9	∞
	+ 75,9	+ 94,8	+ 108,0	+ 126,5	+ 152,7	+ 193,5	+ 404,0	+ 5533,0

Fehlern sind, so ergibt sich, dass die nach Gleichung (B) gezeichneten theoretischen Curven fast immer die Ellipsen schneiden, d. h. die beobachteten Werthe weichen von den mittels jener Gleichung berechneten nur innerhalb der Fehlergrenze ab.

§ 25. Der Gang der Function  $n'$  kann nun aus der Gleichung (3) oder (8) bestimmt werden. In Tab. 7 sind die Werthe von  $n'$  nach (3) eingetragen. Die nach (8), der Beer'schen vereinfachten Gleichung, berechneten unterscheiden sich von denen nach (3) in der zweiten Decimalstelle.

Aus Tab. 7 geht auch der Verlauf des Brechungsverhältnisses bei Gold, Silber und Kupfer hervor. Diese Grösse erreicht für Kupfer schon bei etwa  $63^\circ$  den Werth Eins und wächst bei höheren Incidenzen langsamer und langsamer, sodass die Ablenkung in der Nähe von  $i = 63^\circ$  einen Wechsel des Vorzeichens erfahren muss, was, wie man aus Tab. 5 erkennt, der Wirklichkeit entspricht. Der Uebergang von Minus zu Plus bei Gold und Silber findet erst bei Incidenzen statt, welche grösser als  $70^\circ$  sind, bei denen Beobachtungen aus praktischen Gründen nicht mehr angestellt werden konnten.

§ 26. Die zum Vergleiche der Beobachtungen mit der Theorie nöthigen Ausdrücke habe ich im Obigen zunächst aus der v. Helmholtz'schen Gleichung (3) abgeleitet. Dass die Ergebnisse der Lorentz'schen, Voigt'schen, Cauchy'schen Analyse sich nur insofern von jenen unterscheiden, als irgend welche unbedeutende Vernachlässigungen eingeführt sind, erkennt man aus Tab. 5; folgt doch von den Gleichungen (C—D) direct (C) aus den Lorentz'schen, (D) aus den Voigt'schen (E) aus den Cauchy-Beer'schen Rechnungen.

Nach alledem erscheint es statthaft: Erstens auf diese Gebiete von *der* Theorie zu reden, da alle Sondertheorien schliesslich dieselben Resultate ergeben müssen und thatsächlich ergeben; zweitens zu behaupten, dass *die* Theorie, durch die völlig befriedigende Uebereinstimmung der von mir beobachteten mit den berechneten Werthen, sich als der Wirklichkeit entsprechend herausstellt.

Noch ist zu bemerken, dass auch die speciellen Theorien

---

1) Vgl. die folgende Abhandlung von du Bois und Rubens p. 20



Die Zahlen sind die Mittel aus den mit sämtlichen Prismen eines jeden Metalls erhaltenen Werthen, welche mittels der Gleichung

$$n_0 = 1 + \frac{\alpha}{\beta}$$

berechnet wurden.

Tabelle 8.

	Li <sub>a</sub>	D	F	G
	n <sub>0</sub>			
Gold	0,29	0,66	0,82	0,98
Silber	0,25	0,27	0,20	0,27
Kupfer	0,35	0,60	1,12	1,13
Platin	2,02	1,76	1,63	1,41

Ein Vergleich dieser Resultate mit den von Hrn. Kundt gefundenen zeigt, soweit die unbestimmten Wellenlängen des von ihm benutzten Lichtes es erlauben, eine sehr gute Uebereinstimmung. Bei Silber treten sehr kleine Schwankungen in den Werthen von  $n_0$  auf, welche an die von Jamin<sup>1)</sup> erhaltenen erinnern. Es wäre sehr wünschenswerth, diese Zahlen zu einer weiteren Prüfung der v. Helmholtz'schen Dispersionstheorie zu benutzen. Der erheblichen Absorption wegen sind sie aber vermuthlich so fehlerhaft, dass ihre Anwendung nicht zulässig wäre. Eine solche Prüfung könnten wir mit Erfolg erst vornehmen, wenn uns die Resultate genauerer Messungen zu Verfügung ständen.

Zum Schlusse möchte ich nicht unterlassen, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Kundt, für die mir freundlich gewährte Belehrung und Unterstützung, sowie den Hrn. Privatdocenten Dr. Rubens und Dr. du Bois für die speciell bei dieser Arbeit geleistete Hülfe und Anregung meinen tiefgefühlten Dank auszusprechen.

Berlin, Physik. Institut der Univ., 25. Juli 1892.

1) Beer, Pogg. Ann. 92. p. 417. 1854.









selbst entspricht dem Falle  $n' = 1$  und daher  $i_m = i$ , und bei Prismen  $\alpha = 0$ . Der Uebertritt einer Curve aus einem Gebiet in das andere durch Schneiden der Diagonale bedeutet daher für Prismen ein Verschwinden der Ablenkung unter Wechsel ihres Vorzeichens. Die Abscissen jener Schnittpunkte sind bestimmt durch die Gleichung

$$(4) \quad i = \arcsin \sqrt{1 + \frac{g^2 n_0^2}{2M}},$$

worin  $M$  abgekürzt  $= \frac{1}{2}(n_0^2 - g^2 - 1)$  gesetzt ist. Für Metalle, deren Brechungsindex kleiner als Eins ist, gibt es daher zwei Incidenzen, bei denen das Licht ungebrochen eintritt: erstens die senkrechte, zweitens die durch Gleichung (4) bestimmte. Folgende Werthe sind aus dieser Gleichung berechnet:

(Roths Licht)

Kupfer . . . . .	$i_m = i = 62,9^\circ$
Silber . . . . .	$= 71,9^\circ$
Gold . . . . .	$= 76,2^\circ$

Ein Blick auf Fig. 2 zeigt die Uebereinstimmung. Der Wechsel des Vorzeichens der Ablenkung bei Kupferprismen ist von Hrn. Shea (a. a. O. § 25) thatsächlich in der Nähe der vorgeschriebenen Incidenz  $i = 63^\circ$  beobachtet worden; bei Silber und Gold würde dieselbe Erscheinung zweifellos eintreten, falls es praktisch durchführbar wäre. bei so beträchtlichen Incidenzen ( $i > 70^\circ$ ) noch Beobachtungen anzustellen.

Schliesslich treffen die Curven senkrecht auf die Gerade  $\overline{QR}$ ; die Schnittpunkte findet man aus der Gleichung

$$(5) \quad i_m = \arccot \sqrt{M} + \sqrt{M^2 + g^2 n_0^2}$$

worin  $M$  dieselbe Bedeutung hat wie in (4).

Da die Gerade  $\overline{PQ}$  ( $i_m = 90^\circ$ ) nirgends von den Curven geschnitten wird, tritt auch keine Totalreflexion ein, was mit der Erfahrung übereinstimmt.

§ 5. Aehnlich wie bei unserer früheren Darstellung (a. a. O. Fig. 3) haben wir auch in der vorliegenden Fig. 2 für Kupfer, Gold und Silber hypothetische (punktirte) Curven gegeben, welche unter Voraussetzung der Gültigkeit des Snellius'schen Sinusgesetzes construirt sind. Die bei diesen Metallen mit geringem Brechungsindex ausserordentlich starke Wirkung der Absorption tritt daraus hervor: während nämlich im Ur-



### III. *Ueber das ultraroth Emissionsspectrum der Alkalien; von Benjamin W. Snow.*

(Hierzu Tafel III—V Fig. 1—9.)

#### I. Einleitung.

Unsere Kenntniss von dem ultraroth Theil des Sonnenspectrums verdanken wir wesentlich der Forschung der letzten fünfzig Jahre. Schon im Jahre 1840 gelang es Sir John Herschel<sup>1)</sup> eine ungleichmässige Vertheilung der Energie in dem jenseits des Roth liegenden Theil des Sonnenspectrums festzustellen, indem er beobachtete, dass ein mit Alkohol befeuchtetes Papier, auf welchem ein Sonnenspectrum entworfen wird, an verschiedenen Stellen des Spectrums verschieden rasch trocknet. Er schloss daraus, dass das continuirliche Sonnenspectrum von mehreren kalten Banden durchzogen ist.

Später haben Draper<sup>2)</sup>, die beiden Becquerel<sup>3)</sup> und Lommel<sup>4)</sup> mittelst phosphorescirender Platten, Fizeau und Foucault<sup>5)</sup> unter Benutzung des Thermometers, Lamansky<sup>6)</sup>, Mouton<sup>7)</sup>, und Dessains<sup>8)</sup> mit der Thermosäule, Abney<sup>9)</sup> auf photographischem Wege, endlich Langley<sup>10)</sup> mit Hülfe des Bolometers, nicht nur die drei von Herschel und Draper

---

1) Sir John Herschel, Proc. Roy. Soc. p. 209. 1840. Phil. Mag. 16, p. 331. 1840.

2) Draper, Phil. Mag. 24. p. 456. 1842; 11, p. 157. 1881.

3) E. Becquerel, Compt. rend. 69. p. 999. 1869; 77. p. 302. 1873  
H. Becquerel, Compt. rend. 96. p. 123. 1883; 99. p. 417. 1884. Ann de Chem. et de Phys. 30. p. 33. 1883.

4) Lommel, Wied. Ann. 40. p. 681. 1890; 40. p. 687. 1890.

5) Fizeau und Foucault, Compt. rend 25. p. 449. 1847.

6) Lamansky, Monatsber. der k. Acad. d. Wiss. zu Berlin. p. 638. 1871. Pogg. Ann., 146. p. 207. 1872. Phil. Mag. 43. p. 282. 1872.

7) Mouton, Compt. rend. 89. p. 298. 1879.

8) Dessains, Compt. rend. 95. p. 435. 1882.

9) Abney, Phil. Trans. II. p. 653. 1880; p. 457. 1886.

10) Langley, Report of the Mount Whitney Expedition. p. 131. 1884. Phil. Mag. (5), 26. p. 511. 1888.



sichtbaren und ultravioletten Spectrum gewonnen sind, haben natürlich nur in diesen Gebieten strenge Gültigkeit zu beanspruchen. Da indessen die Verfasser ihren Gleichungen eine allgemeine Gültigkeit zuschreiben, und die durch Extrapolation sich daraus ergebenden Wellenlängen der ultrarothten Linien mit den Angaben der früheren Beobachter nicht übereinstimmen, erschien es mir von Interesse, die Wärmespectren der Alkalien von neuem einer eingehenden Untersuchung zu unterwerfen.

## II. Versuchsmethoden und Apparate.

### 1. Das Bolometer.

Seit längerer Zeit hat sich das Bolometer als das beste Mittel zum Studium des infrarothten Spectrums erwiesen. Dieses Instrument, welches in den Händen von Langley, Ångström, Robert von Helmholtz und Rubens zu einer grossen Vollkommenheit ausgebildet wurde, erfüllt sämtliche Bedingungen, welche zur Lösung des vorliegenden Problems gestellt werden. Es hat sich gezeigt, dass sich temperatur-empfindliche Widerstände von solcher Feinheit herstellen lassen, dass sie in einem selbst sehr reinen Spectrum die Breite der Spectrallinien nicht übertreffen, und dass ferner die Empfindlichkeit dieser Methode diejenige der photographischen in diesen Gebieten weit übersteigt.

Nach einer grossen Reihe von Vorversuchen wurde Platin als Material für die Bolometerwiderstände gewählt. Zwar ist dieses Metall niemals in solcher Reinheit<sup>1)</sup> zu beschaffen, dass sein Temperaturcoefficient demjenigen des Silbers, Kupfers, des Zinns oder Eisens gleichkommt, indessen besitzt es hinsichtlich der Haltbarkeit und Bequemlichkeit der Verarbeitung so beträchtliche Vorzüge vor den erwähnten anderen Stoffen, dass der durch den geringeren Temperaturcoefficienten bedingte Verlust an Empfindlichkeit dadurch reichlich compensirt wird.

Herr Professor E. L. Nichols zu Ithaca, New York, überliess mir in lebenswürdigster Weise eine Quantität Wollaston'schen Draht aus der Werkstatt von W. und L. E. Gurley, Troy, New York. Diesen sehr feinen Draht, dessen Durch-

---

1) Die geringsten Spuren von Iridium sind von erheblichem Einfluss.





Es zeigte sich, dass zur Regulirung der Brücke die einfache Verschiebung dieses Schleifcontacts nicht geeignet war. Bei der ausserordentlichen Empfindlichkeit des Galvanometers brachte eine Lagenänderung des Schleifcontacts um Bruchtheile eines Millimeters bereits Ausschläge von mehreren Metern hervor, ein Umstand, welcher die Handhabung des Apparats ausserordentlich erschwerte. Es wurde deshalb auf dem Messdraht  $MM'$  (Fig. 2) ein zweiter verschiebbarer Contact angebracht und beide Contacts  $p$  und  $q$  mit den Enden eines geradlinig ausgespannten Platindrahtes  $PQ$  verbunden, auf welchem ein mit Quecksilber gefülltes T-förmiges Röhrchen  $G$  verschoben werden konnte. Dieses bildete zugleich das andere Ende der Galvanometerleitung.  $AB$  und  $BC$  sind die beiden in der Dose befindlichen Widerstände,  $AM$  und  $C.M'$  die beiden anderen Zweige, durch den Messdraht  $MM'$  verbunden.

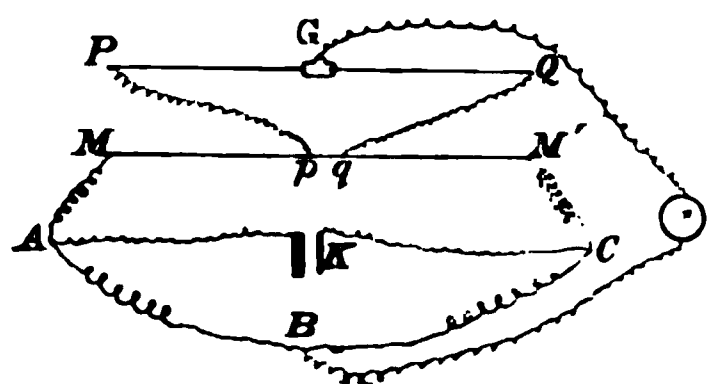


Fig. 2.

Die Punkte  $A$  und  $C$  stehen in Verbindung mit der Batterie  $K$ .

Die Einstellung der Brücke geschah in folgender Weise. Zunächst wurde den beiden Schleifcontacts  $p$  und  $q$  eine solche Lage gegeben, dass sich der Punkt, welcher mit  $B$

gleiches Potential hatte, zwischen ihnen befand und ihr Abstand möglichst verringert. Da der Widerstand der Zuleitungsdrahte  $pP$  und  $qQ$  gegen denjenigen der Messbrücke verschwindet, ist das Potentialgefälle zwischen den Punkten  $P$  und  $Q$  das nämliche, wie auf der Strecke  $pq$ . Man besitzt daher durch die beschriebene Vorrichtung ein Mittel, die Empfindlichkeit der Messbrücke innerhalb weiter Grenzen nach Belieben zu variiren.

Durch Verstellung von  $p$  und  $q$  werden die gröberen, und durch Verschiebung von  $G$  längs  $PQ$  die feineren Einstellungen vorgenommen.

Um die Temperaturempfindlichkeit des Instrumentes zu ermitteln diene mir eine Anordnung, welche von den Hrn. Rubens und Ritter<sup>1)</sup> beschrieben ist.

1) Rubens u. Ritter, Wied. Ann. 40. p. 62. 1890.



Empfindlichkeit die Anwendung eines Galvanometers von höchster Sensibilität nothwendig. Nach mehreren erfolglosen Versuchen mit Instrumenten, welche ich in dem hiesigen Institute vorfand, entschloss ich mich dazu, selbst ein Instrument von ausreichender Empfindlichkeit herzustellen.

Da die Anwendungen empfindlicher Galvanometer auch auf anderen Gebieten sehr zahlreich sind, halte ich es nicht für uninteressant, auf die Construction des Instrumentes näher einzugehen.

Zur Erreichung einer möglichst hohen Empfindlichkeit ist dasjenige astatische System das geeignetste, welches die Vorzüge eines möglichst geringen Trägheitsmomentes und möglicher Stärke und Gleichmässigkeit der Magnetisirung vereinigt. Um diesen Bedingungen so gut als möglich zu entsprechen, bediente ich mich der folgenden Einrichtung.

Nach dem Vorgange von Sir William Thomson bestanden die Magnete aus 3—4 mm langen Stahlstäbchen, welche auf ein äusserst dünnwandiges Capillarröhrchen aus Glas aufgeklebt waren, und zwar derart, dass die Hälfte auf der Vorderseite (vgl. Fig. 4), die Hälfte auf der Rückseite des Stäbchens befestigt wurde.

Den Stahl zur Anfertigung der Magneten für das astatische System lieferte eine sehr kleine Uhrfeder, die in Ferrocyankalium geglüht und in Quecksilber gehärtet wurde.

Fig. 4.

In der Mitte zwischen beiden Magnetensystemen sitzt, in einer Fassung aus dünnem Papier, ein kleiner Spiegel von 5 mm Durchmesser und 0,14 mm Dicke. Um einen tadellosen Spiegel herzustellen, wurden etwa 50 Mikroskopdeckgläschen in kleine Quadrate von 5 mm Seite zerschnitten, gereinigt und auf ein Stück planparalleles Glas gelegt.

Betrachtet man alsdann die Plättchen in dem monochromatischen Lichte der Natriumflamme, so erkennt man leicht an der Form und Lage der Interferenzstreifen, welche Stücke sich zur Herstellung brauchbarer Spiegel eignen.

Im allgemeinen werden die Interferenzstreifen elliptisch oder hyperbolisch gekrümmt sein, ein Zeichen dafür, dass die betrachtete Fläche zwei merklich verschiedene Hauptkrümmungsradien besitzt. Es ist leicht einzusehen, dass solche



Um diesen beiden Bedingungen nach Möglichkeit zu entsprechen, habe ich ein Verfahren angewandt, welches gestattet, die Spule oder Hülse, die beim Aufwinden des Drahtes gewöhnlich als Grundlage dient, vollkommen zu entbehren und gleichzeitig der Rolle annäherungsweise die gewünschte Form zu geben.

Zu diesem Ende liess ich einen Messingkolben *acefdb* (im Axialschnitt in Fig. 5 gezeigt) herstellen, dessen Durchmesser am konischen Ende bei *cd* 3 cm, bei *ab* 6 mm betrug. Auf diesem Kolben war ein kreisförmiger Wulst *H* befestigt. Dieser diente als Widerlage für die quadratische Messingplatte *CD*, welche mit einer kreisförmigen Bohrung versehen war, sodass sie über den cylindrischen Theil des Kolbens geschoben werden konnte. An dem spitzen Ende des

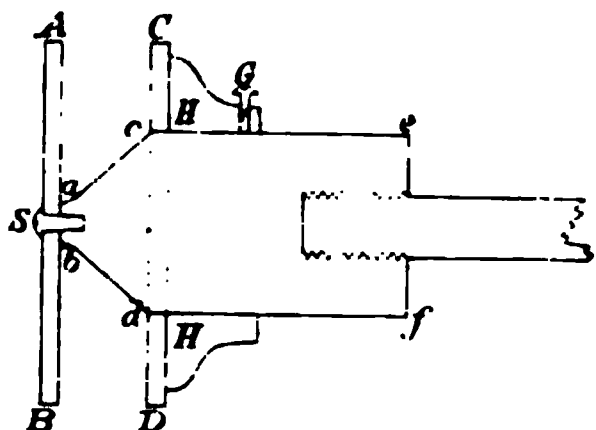


Fig. 5.

Kolbens *ab* wurde mit Hülfe der Schraube *S* die Platte *AB* befestigt. Der Abstand der beiden Platten *AB* und *CD* betrug  $1\frac{1}{2}$  cm.

In diesem zwischen Kolben und beiden Platten befindlichen Räume ist der Draht so gewunden, dass der Theil bis zu *cd* mit 1100 Windungen von 0.25 mm und

der übrige mit 700 Umdrehungen von 0.5 mm starkem Drahte gefüllt ist.

Der mit Draht bewickelte Kolben wurde in flüssiges Paraffin eingetaucht und darin eine Zeit lang ausgekocht. Alsdann brachte man das den Kolben enthaltende Paraffinbad unter den Recipienten einer Luftpumpe. Durch allmähliches Auspumpen wurde die in der Umspinnung der Drähte noch enthaltene Luft entfernt und die Feuchtigkeit verdampft, welche während des Wickelns in das Isolationsmaterial eindringt. Oeffnete man den Hahn des Recipienten, so bewirkte der beim Luftzutritt wirkende Druck, dass das Paraffin in die feinsten Poren der Rolle eindrang, sodass nach dem Erkalten sich eine leicht zu handhabende compacte Masse bildete.

Es wurde dann das überflüssige Paraffin abgeschnitten, die Schrauben *S* und *G* entfernt und eine Spitzflamme zunächst gegen die Platte *AB* gerichtet, wodurch diese schnell heiss

urde und von dem daran in Paraffin eingebetteten Draht  
att abglitt. Auch der Kolben wurde mittels der Stichflamme  
hitzt und in ähnlicher Weise, ohne den Draht zu beschädigen,  
tfernt.

Die Rolle, welche nunmehr nur noch mit der hinteren  
atte  $CD$  in Verbindung stand und deren Windungen lediglich  
rch das Paraffin zusammengehalten wurden, gelangte in dieser  
rm bei der Zusammensetzung des Galvanometers zur An-  
ndung.

Vier Rollen von dieser Beschaffenheit wurden schliesslich  
arweise genau senkrecht untereinander in einem parallel-

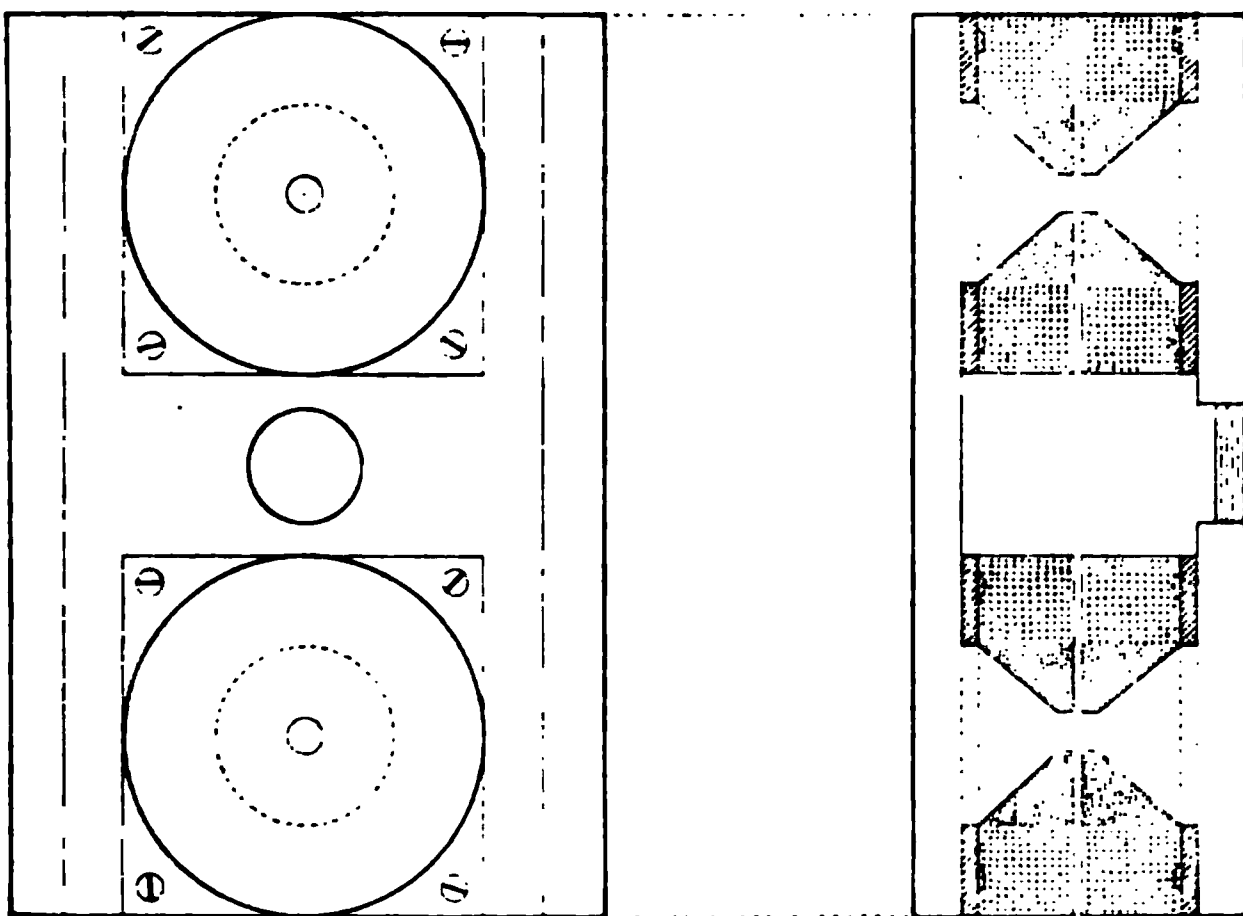


Fig. 6.

ipedischen Kasten (vgl. Fig. 6) befestigt und zwar derart,  
uss sich die Flächen, welche bei der Herstellung durch  
e Platte  $AB$  begrenzt waren in 1 mm Abstand einander  
genüber standen. Die Vorder- und Rückwand des Kastens,  
elche die Rollen trugen, waren aus Holz, die beiden Seiten-  
nde aus Glas gefertigt. Man konnte daher die Vorgänge  
Innern des Kastens leicht von aussen prüfen, insbesondere  
freie Aufhängung der Nadel controlliren.

Die Drahtenden der vier Rollen wurden durch Klemm-  
rauben gebildet, welche auf der Vorderwand des Kastens  
festigt waren. Ein Theil dieser Wand, welcher u. a. die

beiden Rollen trug, konnte nach Belieben entfernt und wieder eingesetzt werden, wodurch das Innere des Kastens allen Manipulationen leicht zugänglich gemacht wurde.

Fügt man noch hinzu, dass der erwähnte Kasten auf einem mit drei Stellschrauben versehenen Brett ruhte, und in der Mitte seines Deckels eine verticale Glasröhre von 40 cm Länge trug, an deren oberen Ende der zur Suspension dienende Quarzfaden befestigt war, so ist das benutzte Galvanometer vollkommen beschrieben.

Für die charakteristischen Constanten dieses Galvanometers ergaben sich folgende Werthe: waren die vier Rollen hintereinander verbunden, so durchfloss der Strom 7200 Drahtwindungen, deren Widerstand 140 Ohm betrug. Astasirte man mit Hülfe eines äusseren Magneten das System bis zu einer (ganzen) Schwingungsdauer von 20 Secunden, so entsprach, bei einem Scalenabstand von 3 Metern, 1 mm Ausschlag einem Strom von  $1,5 \times 10^{-11}$  Amp. Bei der Ausführung der definitiven Versuche erwies sich jedoch eine erheblich geringere Empfindlichkeit als ausreichend und es wurde deshalb das Instrument meist mit 7 Secunden Schwingungsdauer benutzt. Auch dann war die Empfindlichkeit noch beträchtlich grösser, als diejenige der käuflichen Galvanometer.

### 3. Calibrirung des Prismas.

Zur Erzeugung der Spectra diente ein Spectrometer von Schmidt und Haensch, versehen mit einem grossen Prisma aus mittlerem Silicatflint von starker Dispersion. Nach reichlicher Ueberlegung habe ich ein solches dem Diffractionsgitter vorgezogen, da die Uebereinanderlagerung der Spectra in Infraroth die Auffindung unbekannter Spectrallinien wesentlich erschwert und es ferner sehr schwierig ist, Gitterspectra von grosser Intensität und genügender Reinheit zu erzeugen.

Das Prisma habe ich in der vor Kurzem von Hr. Rubens<sup>1)</sup> beschriebenen Methode wiederholt calibriert, wobei mir Hr. Rubens selbst behülflich war. Die Versuche lieferte gut übereinstimmende Resultate, so dass die Abhängigkeit d

---

1) Rubens, Wied. Ann. 45. p. 238. 1892.





Tabelle II.

$\varphi$	I	II	III	Mittel $\lambda$
50° 51'	0.434 "	0.434 "	0.434 "	0.434 "
49° 46'	0.486 „	0.486 „	0.486 „	0.486 „
48° 31 $\frac{1}{2}$ '	0.589 „	0.589 „	0.589 „	0.589 „
2'	0.656 „	0.656 „	0.656 „	0.656 „
47° 50'	0.695 „	0.690 „	0.686 „	0.690 „
40'	0.729 „	0.722 „	0.723 „	0.725 „
30'	0.767 „	0.761 „	0.766 „	0.765 „
20'	0.813 „	0.809 „	0.814 „	0.812 „
10'	0.872 „	0.864 „	0.872 „	0.869 „
0'	0.940 „	0.937 „	0.945 „	0.941 „
46° 50'	1.018 „	1.014 „	1.022 „	1.018 „
40'	1.109 „	1.104 „	1.112 „	1.108 „
36'	1.215 „	1.218 „	1.222 „	1.218 „
20'	1.339 „	1.347 „	1.348 „	1.335 „
10'	1.473 „	1.481 „	1.482 „	1.479 „
0'	1.611 „	1.610 „	1.617 „	1.613 „
45° 50'	1.746 „	1.743 „	1.751 „	1.747 „
40'	1.881 „	1.872 „	1.887 „	1.880 „
30'	2.017 „	2.004 „	2.022 „	2.014 „

Aus den Zahlen dieser letzten Spalte und den entsprechenden Winkeln wurde schliesslich die Dispersionscurve (Fig. 2, Taf. III) construirt, welche bei den folgenden Messungen zur Bestimmung der Wellenlängen verwendet wurde.

Da die Dispersion im sichtbaren Gebiet sehr gross ist, habe ich für diesen Theil des Spectrums unter Benutzung einer grösseren Zahl der Fraunhofer'schen Linien die Dispersionscurve in vergrössertem Maassstab entworfen. Es sind daher die für die metallischen Linien angegebenen Wellenlängen im sichtbaren Spectralgebiet genauer, als in dem jenseits des Roth gelegenen Spectrum.

#### 4. Ueber die Handhabung des Bolometers.

Bevor ich mich der Beschreibung der Versuche selbst zuwende, will ich einige Vorsichtsmaassregeln nicht unerwähnt lassen, welche man bei der Handhabung des Bolometers mit Vortheil anwendet.

Wie bereits zu Anfang erwähnt, sind zwei Zweige des Bolometers aus Neusilber, die beiden übrigen aus Platin gefertigt.

Von diesen letzteren ist der eine, welcher der Strahlung ausgesetzt wird, berusst worden und hat hierbei durch die Erwärmung seinen Temperaturcoefficienten ein wenig geändert. Infolge dieses Umstandes ist das Gleichgewicht der Wider-



Auch bei dieser Art der Ablesung sind die beobachteten Ausschläge, wie Hr. Merritt<sup>1)</sup> gezeigt hat, der Energie der Strahlung proportional.

An jeder Stelle des Spectrums wurde die Energie durch zwei solche Beobachtungen festgestellt.

### III. Das Spectrum des Kohlenbogens.

Längere Zeit hindurch versuchte ich vergeblich, durch Verbrennen der Alkalien in dem Bunsen'schen Brenner oder in dem Knallgasgebläse Spuren von Linien im ultrarothem Spectrum zu entdecken. Erst, als ich den electrischen Kohlenbogen zur Anwendung brachte, gelang es mir, nach dieser Richtung Resultate zu erhalten.

Da die Befürchtung nahe lag, dass ein Theil der beobachteten infrarothem Spectrallinien nicht von den verbrennenden Alkalien, sondern von dem Kohlenbogen selbst herrühre, habe ich mich zunächst in eingehender Weise mit dem infrarothem Spectrum des Kohlenbogens beschäftigt.

Zur Erzeugung desselben diente eine alte Duboscq'sche Bogenlampe, welche mit dem constanten Strom der Berliner Centralen (110 Volt) gespeist, sehr ruhig brannte. Durch Einschalten von Widerstand wurde derselbe auf 7,5 bis 7,8 Amp. constant gehalten. Zur Erhaltung eines gleichmässig brennenden Lichtbogens von passender Länge ( $6\frac{1}{2}$  mm) erschienen mir nach mannigfachen Versuchen Kohlen von 8 mm Durchmesser am geeignetsten; auch war es vortheilhaft, als Anode eine Dochkohle zu benutzen.

Von dem Kohlenbogen wurde mittels einer Linse ein reelles, ungefähr auf das doppelte vergrössertes Bild auf den Spalt des Spectrometers geworfen. Mit Hülfe eines Diaphragmas, welches sich in geringer Entfernung vor dem Spalte befand, wurden die Bilder der leuchtenden Kohlen sowie der grösste Theil des Bogens abgeblendet, sodass nur ein ca. 7 mm langer, äusserst schmaler, dem centralen Theile des Bogens angehörender rechteckiger Ausschnitt derselben in den Collimator des Instrumentes eindringen konnte.

Die Breite des Spaltes betrug bei sämmtlichen definitiven

---

1) Merritt, Am. Journal of Sci. (3) 41. p. 422. 1891.



Tabelle III.  
Kohlenbogen.  
Temperaturempfindlichkeitsbestimmung.  
Ausschläge in mm:  
137 138 138 130 136 Mittel 136.  
Energiebeobachtungen.

q	λ	I	q	λ	I
54° 7½'		0	49° 56½'	0,4770 "	3
53° 57'		0	49'	0,4838 „	3
50½'	0,365(?) "	11	41'	0,4920 „	2
44½'		0	21'	0,5140 „	9
4½'	0,3770 „	13	19½'	0,5155 „	8
			15	0,5213 „	4
52° 39½'	0,3820 „	80	48° 51½'	0,5540 „	6
29½'	0,3850 „	185	34½'	0,5835 „	9
27½'	0,3858 „	284	31½'	0,5892 „	14
26'	0,3861 „	306	28½'	0,5945 „	11
24½'	0,3868 „	279	26'	0,600 „	11
23'	0,3871 „	310	21'	0,611 „	12
22'	0,3874 „	282	17½'	0,619 „	13
20½'	0,3880 „	328	14'	0,627 „	15
19½'	0,3883 „	357	11'	0,635 „	18
18'	0,3889 „	83	8½'	0,642 „	19
16½'	0,3894 „	29	5½'	0,649 „	21
10½'	0,3918 „	24	2½'	0,657 „	20
51° 48½'	0,4015 „	10	47° 59½'	0,666 „	20
30½'	0,4110 „	29	57'	0,673 „	21
27'	0,4128 „	48	55'	0,679 „	17
24½'	0,4140 „	76	53'	0,685 „	22
23'	0,4150 „	72	50½'	0,693 „	26
22'	0,4157 „	64	48'	0,701 „	26
21'	0,4163 „	68	45'	0,711 „	36
19½'	0,4170 „	68	43'	0,718 „	35
18½'	0,4177 „	54	41'	0,726 „	40
17'	0,4183 „	62	39½'	0,731 „	43
15½'	0,4194 „	35	38'	0,737 „	39
14'	0,4203 „	42	36½'	0,743 „	39
11½'	0,4210 „	8	35'	0,749 „	41
½'	0,4250 „	4	33½'	0,755 „	32
50° 31'	0,4488 „	7	32'	0,761 „	37
28'	0,4508 „	12	30½'	0,768 „	35
25'	0,4532 „	6	29'	0,775 „	30



· Temperaturempfindlichkeitsbestimmung.

Ausschläge: 128 135 128 132 132 134, Mittel: 132.

$$\alpha = \frac{136 + 132}{2} = 134,$$

woraus

$$k = \frac{1}{134\,000} {}^{\circ}C.$$

Die Zahlen dieser Tabelle sind in der Curve, Fig. 3, Taf. III graphisch dargestellt. Die an der Kreistheilung abgelesene Ablenkungen sind als Abscissen und die entsprechenden Ausschläge (in Millimetern) als Ordinaten gewählt.

Um dem Beschauer die Uebersicht zu erleichtern, sind einige der Fraunhofer'schen Linien in der Figur verzeichnet auch sind die Grenzen des sichtbaren Spectrums, wie die gewöhnlich angenommen werden, darin durch punktirte Linien angegeben. Die Annahme dieser Grenzen ist natürlich in einer gewissen Willkür behaftet, da aus den Untersuchungen von Helmholtz<sup>1)</sup>, Esselbach<sup>2)</sup>, Becquerel<sup>3)</sup> und Langley hervorgeht, dass man unter besonders günstigen Bedingungen Strahlen, deren Wellenlänge weit ausserhalb der angegebenen Grenzen liegt, mit dem Auge wahrnehmen kann. Auch die vorliegende Arbeit liefert hierfür einige charakteristische Belege.

Fig. 4, Taf. III stellt dieselbe Curve, nur mit dem Unterschied, dass statt der Winkelablenkungen die betrachteten Wellenlängen als Abscissen gewählt sind, dar.

Ein flüchtiger Blick auf die erwähnten Curven lehrt uns die merkwürdige Thatsache, dass *im Spectrum des electrisch Kohlenbogens das Maximum der Energie weiter hinaus nach dem Violetten hin liegt, als die beiden Fraunhofer'schen Linien  $H_1$  und  $H_2$ .*

Die höchste Erhebung zeigt die Energiecurve von  $\lambda = 0,385 \mu$  bis  $\lambda = 0,388 \mu$ ; ein zweites Maximum findet sich von  $\lambda = 0,411 \mu$  bis  $\lambda = 0,420 \mu$ .

Beobachtet man diese äusserst intensiven Banden mit Hülfe des Auges, so gewahrt man, dass das erste aus fünf und das zweite aus sechs einzelnen Streifen besteht, welche geg-

1) Helmholtz, Pogg. Ann. 94. p. 12. 1855.

2) Esselbach, Monatsber. d. k. Acad. d. Wiss. zu Berlin. p. 757. 1855.  
Esselbach, Pogg. Ann. 98. p. 514. 1856.

3) H. Becquerel, Compt. Rend. 97. p. 73. 1883.

4) Langley, Phil. Mag. (5) 21. p. 396. 1886.









breit erscheinen. Alsdann ist man, wenn die Linien nicht übereinander fallen, von der Stärke der angewandten Dispersion vollkommen unabhängig und kann die Reduction auf das Normalspectrum ohne Veränderung der Ordinaten vornehmen.

Mit Hülfe eines Ocularmikrometers habe ich mich davon überzeugt, dass die Breite der sämtlichen Spectrallinien innerhalb des sichtbaren Spectrums bei den von mir gewählten Versuchsbedingungen die gleiche war. Dennoch ist es ohne Zweifel nicht gerechtfertigt, die in Fig. 4, Taf. III entworfene Curve als Bild der Energievertheilung innerhalb des von dem Kohlenbogen erzeugten Normalspectrums zu bezeichnen, da, wie wir gezeigt haben, die Linien, aus welchen die Banden bestehen, sich theilweise überdecken. Andererseits aber ist das Spectrum kein continuirliches, so dass es nicht gestattet ist, die von Langley gegebene Reduction anzuwenden. Ich habe mich daher darauf beschränken müssen, sowohl für die Strahlung des Kohlenbogens als auch für die später zu beschreibenden Emissionsspectren der Metalle, für welche das Gleiche gilt, die Energievertheilung im Dispersionsspectrum anzugeben und statt der Winkel die betrachteten Wellenlängen als Abscissen aufzutragen.

Ich will noch hinzufügen, dass die Annahme, das Spectrum des Kohlenbogens sei ein continuirliches im Sinne der von Langley beobachteten Wärmespectra erhitzter fester Körper uns unter Benutzung der erwähnten Reduction für die Energie der violetten Banden bei  $\lambda = 0,388 \mu$  und  $\lambda = 0,415 \mu$  zu Werthen führt, welche im Verhältniss zur Energie der ultrarothten Maxima noch weit grösser sind, als sie aus der Zeichnung Fig. 4, Taf. III hervorgehen.

#### V. Energiespectra der Alkalien.

Die Aufgabe, welche ich beim Verbrennen der verschiedenen Alkalien im electrischen Flammenbogen zu lösen hatte, bestand darin ein Mittel zu finden, wodurch die Metalle oder ihre Salze möglichst stetig und gleichmässig eingeführt werden. Unter anderen erscheinen mir die folgenden Methoden möglich:





Tabelle V.

Natrium.

 $k = 1 / 135,000^{\circ} \text{ C.}$ 

$\varphi$	$\lambda$	I	$\varphi$	$\lambda$	I
52° 37½'	0,3836 "	0	48° 19'	0,616 "	91
28½'	0,3852 „	1	16'	0,622 „	11
23'	0,3870 „	0	10½'	0,637 „	13
20½'	0,3880 „	0	7½'	0,644 „	22
13'	0,3908 „	0	6'	0,648 „	13
7'	0,3932 „	31	3½'	0,654 „	8
3½'	0,3950 „	2	½'	0,663 „	6
51° 59½'	0,3967 „	31	47° 57½'	0,671 „	26
55½'	0,3983 „	0	56'	0,676 „	10
11½'	0,4218 „	1	54½'	0,680 „	10
8½'	0,4236 „	42	53'	0,685 „	4
5½'	0,4255 „	4	51½'	0,690 „	7
50° 10½'	0,4650 „	0	50'	0,695 „	5
7'	0,4677 „	11	48½'	0,699 „	7
4'	0,4703 „	1	47'	0,704 „	6
49° 37'	0,4963 „	6	45½'	0,710 „	14
34'	0,4996 „	62	44'	0,714 „	13
31'	0,5028 „	4	42½'	0,720 „	12
22'	0,5130 „	7	41'	0,726 „	9
19'	0,5164 „	12	39½'	0,731 „	9
16'	0,5200 „	3	38'	0,737 „	10
13'	0,5240 „	4	36½'	0,743 „	5
10½'	0,5271 „	16	35'	0,749 „	6
7½'	0,5310 „	1	33½'	0,755 „	9
48° 50½'	0,5560 „	10	32'	0,761 „	12
48'	0,5600 „	19	30½'	0,768 „	24
46½'	0,5625 „	15	29'	0,775 „	12
43'	0,5685 „	186	27½'	0,781 „	6
39½'	0,5742 „	21	25½'	0,789 „	8
38'	0,5772 „	20	24'	0,796 „	8
36½'	0,5800 „	27	22½'	0,803 „	22
31½'	0,5892 „	877	21'	0,811 „	166
28½'	0,5950 „	96	20½'	0,814 „	603
24½'	0,6040 „	28	19½'	0,818 „	659
21½'	0,610 „	29	18'	0,825 „	170
			16½'	0,833 „	27

φ	λ	I	φ	λ	I
47° 15'	0,841 <sup>μ</sup>	22	46° 21½'	1,317 <sup>μ</sup>	
13½'	0,849 „	18	20'	1,337 „	
12'	0,857 „	18	18½'	1,358 „	
10½'	0,865 „	11	17'	1,380 „	
9'	0,874 „	8	15½'	1,399 „	
7½'	0,884 „	6	14'	1,421 „	
6'	0,895 „	6	12½'	1,442 „	
4½'	0,905 „	6	11'	1,461 „	
3'	0,916 „	4	9½'	1,482 „	
1½'	0,926 „	7	8'	1,503 „	
0'	0,938 „	7	6½'	1,523 „	
			5'	1,543 „	
46° 58½'	0,949 „	5	3½'	1,563 „	
57'	0,962 „	6	2'	1,583 „	
55'	0,977 „	5	½'	1,603 „	
53½'	0,988 „	8			
52'	1,003 „	8	45° 59'	1,624 „	
50½'	1,014 „	4	57½'	1,645 „	
49'	1,028 „	6	56'	1,667 „	
47½'	1,041 „	5	54'	1,694 „	
46'	1,055 „	7	52½'	1,713 „	
44½'	1,067 „	12	51'	1,733 „	
43'	1,082 „	12	49½'	1,755 „	
41½'	1,096 „	11	48'	1,776 „	
40'	1,111 „	45	46½'	1,795 „	
38½'	1,127 „	415	45'	1,816 „	
37'	1,143 „	112	43½'	1,836 „	
35½'	1,158 „	24	42'	1,857 „	
34'	1,176 „	11	40½'	1,878 „	
32½'	1,191 „	7	39'	1,898 „	
31'	1,208 „	8	37½'	1,918 „	
29½'	1,223 „	10	36'	1,938 „	
28'	1,242 „	30	34½'	1,958 „	
26½'	1,257 „	16	33'	1,978 „	
25'	1,276 „	8	31½'	2,000 „	
23'	1,300 „	6			



Tabelle VI.

Kalium.

$k = 1/127\,000^\circ \text{C.}$

$\varphi$	$\lambda$	I	$\varphi$	$\lambda$	I
$2^\circ 35\frac{1}{2}'$	0,3830 <sup>μ</sup>	0	$47^\circ 54\frac{1}{2}'$	0,680 <sup>μ</sup>	8
$29\frac{1}{2}'$	0,3850 „	2	$51'$	0,691 „	74
$23\frac{1}{2}'$	0,3870 „	0	$49'$	0,698 „	13
$21'$	0,3877 „	0	$44\frac{1}{2}'$	0,713 „	7
$14'$	0,3903 „	0	$39'$	0,733 „	12
$51^\circ 46'$	0,4030 „	0	$36'$	0,745 „	27
$43'$	0,4045 „	30	$31'$	0,767 „	1443
$40'$	0,4060 „	0	$30'$	0,770 „	622
$12'$	0,4214 „	2	$28\frac{1}{2}'$	0,777 „	82
$9'$	0,4233 „	16	$27'$	0,783 „	31
$6'$	0,4251 „	0	$25\frac{1}{2}'$	0,790 „	31
$50^\circ 17\frac{1}{2}'$	0,4590 „	2	$24'$	0,796 „	27
$49^\circ 46'$	0,4870 „	2	$22\frac{1}{2}'$	0,803 „	36
$41\frac{1}{2}'$	0,4915 „	0	$21'$	0,811 „	34
$39\frac{1}{2}'$	0,4942 „	3	$19\frac{1}{2}'$	0,818 „	22
$32'$	0,5023 „	0	$18'$	0,825 „	16
$25'$	0,5095 „	4	$16\frac{1}{2}'$	0,832 „	16
$23\frac{1}{2}'$	0,5113 „	5	$15'$	0,841 „	17
$20\frac{1}{2}'$	0,5148 „	0	$13\frac{1}{2}'$	0,850 „	14
$8'$	0,5307 „	0	$12'$	0,857 „	12
$5\frac{1}{2}'$	0,5340 „	9	$10\frac{1}{2}'$	0,866 „	12
$4'$	0,5362 „	6	$9'$	0,876 „	13
$2'$	0,5388 „	0	$7\frac{1}{2}'$	0,886 „	12
$48^\circ 40'$	0,5737 „	1	$6'$	0,896 „	9
$36\frac{1}{2}'$	0,5800 „	14	$4\frac{1}{2}'$	0,906 „	8
$34'$	0,5848 „	7	$3'$	0,917 „	10
$31\frac{1}{2}'$	0,5892 „	55	$1'$	0,931 „	7
$28\frac{1}{2}'$	0,5950 „	3	$46^\circ 59\frac{1}{2}'$	0,943 „	20
$21\frac{1}{2}'$	0,6093 „	2	$58'$	0,954 „	20
$19'$	0,616 „	6	$56\frac{1}{2}'$	0,966 „	9
$10'$	0,638 „	8	$55'$	0,977 „	8
$8'$	0,643 „	11	$53\frac{1}{2}'$	0,990 „	7
$5\frac{1}{2}'$	0,649 „	8	$52'$	1,002 „	9
			$50\frac{1}{2}'$	1,015 „	8

φ	λ	I	φ	λ	I
46° 49'	1,029 "	14	46° 5'	1,543 "	5
47½'	1,042 „	16	3½'	1,563 „	6
46'	1,055 „	21	2'	1,583 „	3
44½'	1,068 „	17	½'	1,603 „	2
43'	1,082 „	102			
42½'	1,090 „	57	45° 59'	1,625 „	4
41½'	1,096 „	25	57'	1,652 „	2
40'	1,110 „	13	55½'	1,672 „	2
38½'	1,127 „	35	54'	1,693 „	4
37'	1,144 „	207	52½'	1,713 „	3
35½'	1,158 „	389	51'	1,733 „	3
34'	1,175 „	34	49½'	1,755 „	2
32½'	1,193 „	14	48'	1,776 „	5
31'	1,209 „	126	46½'	1,795 „	0
29½'	1,225 „	190	45'	1,816 „	0
28'	1,243 „	43	43½'	1,836 „	2
26'	1,264 „	10	42'	1,857 „	5
24½'	1,283 „	11	40½'	1,876 „	3
23'	1,301 „	10	39'	1,898 „	2
21½'	1,317 „	8	37½'	1,918 „	4
20'	1,336 „	10	36'	1,938 „	0
18½'	1,359 „	10	34½'	1,958 „	0
17'	1,379 „	5	33'	1,978 „	0
15½'	1,400 „	5	31½'	2,000 „	0
14'	1,420 „	8	30'	2,021 „	0
12½'	1,440 „	19	28½'	2,042 „	0
11'	1,461 „	60	27'	2,062 „	0
9½'	1,482 „	56	25'	2,087 „	0
8'	1,503 „	49	23½'	2,108 „	0
6½'	1,523 „	12	22'	2,128 „	0

Tabelle VII.

Lithium.

 $k = 1/134\,000^\circ \text{C.}$ 

$\varphi$	$\lambda$	I	$\varphi$	$\lambda$	I
52° 33½'	0,3838 $\mu$	2	47° 58'	0,670 $\mu$	1191
26'	0,3860 „	2	56'	0,676 „	57
22'	0,3875 „	2	54½'	0,680 „	29
16'	0,3900 „	0	53'	0,684 „	24
11½'	0,3913 „	8	51½'	0,689 „	18
4'	0,3947 „	0	50'	0,694 „	15
			48½'	0,699 „	11
51° 29½'	0,4116 „	1	47'	0,704 „	10
25½'	0,4140 „	58	45½'	0,709 „	10
22½'	0,4155 „	5	44'	0,715 „	11
11'	0,4220 „	0	42½'	0,720 „	8
8½'	0,4238 „	11	41'	0,725 „	7
4½'	0,4260 „	0	39½'	0,732 „	6
½'	0,4288 „	10	38'	0,737 „	5
			36½'	0,743 „	10
50° 57½'	0,4305 „	2	35'	0,749 „	6
18'	0,4590 „	8	33½'	0,754 „	6
14½'	0,4615 „	331	32'	0,760 „	11
10½'	0,4650 „	7	30½'	0,768 „	12
			29'	0,775 „	8
49° 37½'	0,4958 „	2	27½'	0,781 „	9
34½'	0,4990 „	34	26'	0,787 „	17
31½'	0,5023 „	2	24½'	0,794 „	18
			22½'	0,803 „	151
48° 59½'	0,5420 „	8	21½'	0,807 „	292
34½'	0,5840 „	8	21'	0,811 „	238
31½'	0,5892 „	51	19½'	0,819 „	22
28½'	0,5950 „	8	18'	0,825 „	15
26½'	0,5993 „	5	16½'	0,833 „	12
25'	0,6025 „	20	15'	0,841 „	11
21½'	0,6102 „	570	13½'	0,849 „	15
18'	0,6180 „	17	12'	0,857 „	12
12½'	0,6308 „	7	10½'	0,865 „	10
5½'	0,6490 „	18	9'	0,876 „	9
½'	0,663 „	46			

φ	λ	I	φ	λ
47° 7½'	0,885 "	8	46° 17'	1,378 "
6'	0,895 "	5	15½'	1,397 "
4½'	0,904 "	7	14'	1,420 "
3'	0,916 "	9	12½'	1,440 "
1½'	0,926 "	11	11'	1,462 "
0'	0,937 "	11	9½'	1,482 "
			8'	1,502 "
46° 58½'	0,950 "	9	6½'	1,522 "
57'	0,962 "	9	5'	1,543 "
55½'	0,973 "	4	3½'	1,563 "
54'	0,987 "	8	2'	1,583 "
52'	1,002 "	5	½'	1,603 "
50½'	1,014 "	5		
49'	1,028 "	6	45° 59'	1,625 "
47½'	1,041 "	6	57½'	1,645 "
46'	1,054 "	5	56'	1,665 "
44½'	1,067 "	7	54½'	1,685 "
43'	1,082 "	14	53'	1,706 "
41½'	1,096 "	8	51'	1,732 "
40'	1,111 "	9	49½'	1,755 "
38½'	1,127 "	9	48'	1,776 "
37'	1,144 "	6	46½'	1,796 "
35½'	1,157 "	7	45'	1,816 "
34'	1,176 "	7	43½'	1,835 "
32½'	1,192 "	9	42'	1,857 "
31'	1,208 "	7	40½'	1,876 "
29½'	1,225 "	8	39'	1,898 "
28'	1,242 "	5	37½'	1,918 "
26½'	1,257 "	7	36'	1,937 "
25'	1,276 "	8	34½'	1,958 "
23½'	1,294 "	4	33'	1,978 "
21½'	1,317 "	4	31½'	2,000 "
20'	1,336 "	3	30'	2,020 "
18½'	1,357 "	2	28½'	2,042 "

Tabelle VIII.

Rubidium.

 $k = 1 / 132\,000^\circ \text{C.}$ 

$\varphi$	$\lambda$	I	$\varphi$	$\lambda$	I
52° 30'	0,3832 $\mu$	0	48° 11'	0,633 $\mu$	12
24'	0,3868 „	0	6'	0,648 „	10
20½'	0,3880 „	0	1'	0,662 „	8
16½'	0,4190 „	0	47° 58½'	0,669 „	11
51° 14'	0,4200 „	6	55½'	0,677 „	8
12'	0,4215 „	4	49½'	0,696 „	5
9½'	0,4230 „	8	45'	0,711 „	8
6½'	0,4250 „	0	41'	0,726 „	21
40° 18'	0,4588 „	0	39½'	0,731 „	17
39° 19'	0,5163 „	3	38'	0,737 „	19
15'	0,5215 „	5	35½'	0,747 „	15
12½'	0,5242 „	2	33½'	0,755 „	31
10½'	0,5270 „	6	31½'	0,763 „	128
6'	0,5332 „	2	30½'	0,768 „	188
3½'	0,5367 „	4	29'	0,775 „	414
½'	0,5406 „	2	27½'	0,781 „	262
48° 58½'	0,5435 „	4	25½'	0,791 „	443
56'	0,5473 „	2	24½'	0,794 „	279
48½'	0,5592 „	9	23'	0,801 „	56
45½'	0,5642 „	3	21½'	0,808 „	38
43½'	0,5676 „	1	20'	0,815 „	32
41½'	0,5710 „	7	18½'	0,823 „	42
38½'	0,5762 „	2	17'	0,831 „	24
35½'	0,5820 „	3	15½'	0,839 „	25
31½'	0,5892 „	26	14'	0,846 „	50
28½'	0,5942 „	5	12½'	0,854 „	14
25'	0,6020 „	4	11'	0,863 „	11
23'	0,607 „	8	9½'	0,872 „	45
21'	0,611 „	6	8'	0,882 „	59
19'	0,616 „	12	6½'	0,892 „	17
17'	0,620 „	11	5'	0,902 „	10
15½'	0,624 „	10	3½'	0,912 „	11
14'	0,627 „	23	2'	0,923 „	9
			½'	0,934 „	9

φ	λ	I	φ	λ
46 ° 59'	0,946 "	10	46° 8½'	1,498 "
57½'	0,957 „	7	7'	1,517 „
55½'	0,972 „	7	5½'	1,535 „
54'	0,986 „	21	4'	1,556 „
52½'	0,998 „	160	2½'	1,576 „
51'	1,011 „	32	1'	1,597 „
49½'	1,023 „	9		
48'	1,038 „	7	45° 59½'	1,618 „
46½'	1,050 „	8	57½'	1,645 „
45'	1,064 „	11	56'	1,666 „
43½'	1,077 „	10	54½'	1,685 „
42'	1,092 „	13	53'	1,705 „
40½'	1,105 „	11	51½'	1,725 „
39'	1,124 „	7	50'	1,747 „
37½'	1,138 „	13	48½'	1,770 „
36'	1,154 „	26	47'	1,790 „
34½'	1,170 „	10	45½'	1,812 „
33'	1,187 „	5	44'	1,831 „
31½'	1,203 „	6	42½'	1,850 „
30'	1,218 „	13	41'	1,870 „
28'	1,242 „	10	39½'	1,890 „
26½'	1,258 „	9	38'	1,913 „
25'	1,277 „	35	36½'	1,932 „
23½'	1,293 „	100	35'	1,952 „
22'	1,312 „	197	33½'	1,972 „
20½'	1,330 „	151	32'	1,993 „
19'	1,352 „	83	30½'	2,014 „
17½'	1,372 „	16	29'	2,036 „
16'	1,393 „	15	27'	2,062 „
14½'	1,413 „	40	25½'	2,082 „
13'	1,434 „	82	24'	2,102 „
11½'	1,454 „	94	22½'	2,120 „
10'	1,476 „	102		

Tabelle IX.  
Caesium.  
 $k = 1/132\,000^\circ \text{C.}$

$\varphi$	$\lambda$	I	$\varphi$	$\lambda$	I
$52^\circ 41\frac{1}{2}'$	0,3812 $^{\mu}$	0	$5'$	0,650 $^{\mu}$	9
$32'$	0,3842 „	0	$2\frac{1}{2}'$	0,658 „	15
$25'$	0,3868 „	0	$\frac{1}{2}'$	0,663 „	19
$22\frac{1}{2}'$	0,3875 „	0			
$51^\circ 17'$	0,4186 „	0	$47^\circ 58'$	0,670 „	46
$14\frac{1}{2}'$	0,4200 „	4	$56'$	0,676 „	11
$12\frac{1}{2}'$	0,4212 „	2	$54'$	0,681 „	17
$10\frac{1}{2}'$	0,4225 „	7	$52\frac{1}{2}'$	0,687 „	26
$7\frac{1}{2}'$	0,4243 „	0	$50'$	0,694 „	63
$50^\circ 23\frac{1}{2}'$	0,4545 „	0	$47\frac{1}{2}'$	0,702 „	20
$21'$	0,4565 „	15	$45'$	0,711 „	11
$18\frac{1}{2}'$	0,4584 „	2	$42'$	0,721 „	47
$16\frac{1}{2}'$	0,4600 „	6	$39'$	0,733 „	13
$13\frac{1}{2}'$	0,4625 „	0	$34\frac{1}{2}'$	0,751 „	12
$49^\circ 41'$	0,4920 „	4	$32\frac{1}{2}'$	0,759 „	43
$38\frac{1}{2}'$	0,4950 „	4	$31'$	0,766 „	65
$0'$	0,5412 „	4	$29'$	0,775 „	175
$48^\circ 52\frac{1}{2}'$	0,5528 „	7	$27\frac{1}{2}'$	0,781 „	95
$50'$	0,5570 „	4	$26'$	0,788 „	104
$46'$	0,5635 „	7	$24\frac{1}{2}'$	0,794 „	105
$43'$	0,5686 „	2	$23'$	0,801 „	77
$38'$	0,5772 „	4	$21\frac{1}{2}'$	0,808 „	45
$35'$	0,5828 „	28	$20'$	0,815 „	29
$33\frac{1}{2}'$	0,5856 „	23	$18\frac{1}{2}'$	0,823 „	26
$31\frac{1}{2}'$	0,5892 „	54	$17'$	0,831 „	54
$28\frac{1}{2}'$	0,5950 „	9	$15\frac{1}{2}'$	0,838 „	297
$25\frac{1}{2}'$	0,6010 „	14	$14'$	0,847 „	226
$23'$	0,607 „	9	$12\frac{1}{2}'$	0,854 „	59
$20'$	0,614 „	8	$11'$	0,863 „	151
$17\frac{1}{2}'$	0,619 „	23	$9\frac{1}{2}'$	0,872 „	140
$15\frac{1}{2}'$	0,624 „	8	$8'$	0,882 „	345
$13\frac{1}{2}'$	0,629 „	12	$6\frac{1}{2}'$	0,892 „	113
$10\frac{1}{2}'$	0,636 „	7	$5'$	0,902 „	154
$7\frac{1}{2}'$	0,644 „	10	$3\frac{1}{2}'$	0,913 „	83
			$2'$	0,923 „	16
			$\frac{1}{2}'$	0,934 „	9

φ	λ	I	φ	λ	I
46° 59'	0,945 "	10	8½'	1,495 "	19
57½'	0,956 „	9	7'	1,516 „	20
55½'	0,973 „	7	5½'	1,535 „	5
54'	0,986 „	129	4'	1,555 „	6
52½'	0,998 „	181	2½'	1,575 „	7
51'	1,011 „	17	1'	1,596 „	4
49½'	1,023 „	5			
48'	1,038 „	6	45° 59½'	1,617 „	3
46½'	1,050 „	4	58'	1,638 „	4
45'	1,064 „	6	56½'	1,658 „	3
43½'	1,077 „	6	55'	1,679 „	3
42'	1,092 „	4	53½'	1,700 „	2
40½'	1,105 „	6	51½'	1,725 „	2
39'	1,124 „	8	50'	1,748 „	2
37½'	1,138 „	8	48½'	1,768 „	1
36'	1,154 „	8	47'	1,789 „	2
34½'	1,170 „	4	45½'	1,807 „	1
33'	1,187 „	4	44'	1,830 „	0
31½'	1,202 „	7	42½'	1,850 „	0
30'	1,219 „	6	41'	1,871 „	0
28½'	1,236 „	4	39½'	1,890 „	0
27'	1,253 „	12	38'	1,912 „	0
25½'	1,269 „	13	36½'	1,930 „	0
23½'	1,293 „	27	35'	1,952 „	0
22'	1,312 „	64	33½'	1,972 „	0
20½'	1,327 „	80	32'	1,992 „	0
19'	1,352 „	31	30½'	2,012 „	0
17½'	1,372 „	7	29'	2,036 „	0
16'	1,392 „	11	27½'	2,055 „	0
14½'	1,412 „	35	26'	2,075 „	0
13'	1,433 „	38	24½'	2,095 „	0
11½'	1,453 „	51	22½'	2,120 „	0
10'	1,475 „	25	21'	2,142 „	0





Kohlen mit einem aus Metallsalz bestehenden Docht sehen, da, wenn man z. B. eine massive Kohle als I benutzt, stets in der Nähe der negativen Kohlenspi Rest des charakteristischen violetten Bogenlichtes zurück

Die Energie der metallischen Linien lässt sich Verbrennung grösserer Salzmengen, welche man nach gleichen Verfahren in den Flammenbogen einführt, und weitere Bohrungen anwendet, noch beträchtlich steigern beobachtete ich, dass bei Anwendung einer 5 mm Bohrung die Intensität der Linien nahezu den zehnfachen Betrag erreichte. Doch ist die Benutzung so grosser Mengen mit Nachtheilen anderer Art verbunden, welche dazu veranlassen auf die ursprüngliche Weite der Bol von 3 resp.  $1\frac{1}{2}$  zurückzugreifen.

Auf sämtlichen Zeichnungen ist zu bemerken, dass die Linien nach dem ultrarothem Ende hin immer breiter werden.

Diese Erscheinung entspricht nicht einer physikalischen Thatsache, sondern wird theils durch die von uns gewählte Form der Darstellung hervorgebracht, theils durch die optische Aberration der Spectrometerlinsen veranlasst. Wenn man das Bolometer nämlich durch das ganze Spectrum hinwandern, so vereinigt es auf seiner Fläche im Ultraviolet eine weit grössere Zahl von Strahlen verschiedener Wellenlänge als im sichtbaren Spectralgebiet. Wollte man das Bolometerfadens in den Fig. 4—9, Taf. III—V an verschiedenen Stellen eintragen, so müsste man dieses bei  $\lambda = 2 \mu$  40mal so breit zeichnen als bei  $\lambda = 0,4 \mu$ . Das Gleiche gilt von dem Spaltbild selbst. Es werden daher Spectrallinien, welche in der Energiecurve des Dispersionsspectrums als sehr breit erscheinen, bei  $\lambda = 2 \mu$  eine weit grössere scheinbare Breite besitzen, als bei  $\lambda = 0,4 \mu$ , wenn man statt der Winkelstrahl des Bolometerarmes die Wellenlängen als Abscissen wählt.

Wie bereits erwähnt, tritt noch hinzu, dass die Dispersion der Spectrallinsen im Ultrarothem eine bedeutend vollkommenere ist als im sichtbaren Gebiet, und infolgedessen die Linien um so weniger scharf sind, je weiter sie vom violetten Ende der grösseren Wellen liegen. Von Abney<sup>1)</sup> ist :

---

1) Abney, Phil. Trans. Pt. II. p. 658. 1880.



Gebieten des sichtbaren Spectrums und in dem von mir untersuchten Theil des Ultrarothens ist die Wirkung der Absorption nur gering, wie aus der bereits mehrfach citirten Arbeit des Hrn. Rubens hervorgeht. Hiernach tritt bei den untersuchten Crowngläsern erst bei einer Wellenlänge  $\lambda = 2,3\mu$  starke Absorption ein, während die Flintgläser eine noch weiter gehende Durchlässigkeit für infraroth Strahlen aufweisen. Wahrscheinlich sind die durch die Spectrometerlinsen und das Prisma hervorgerufenen Absorptionen im violetten Ende des Spectrums bedeutend stärker, doch bin ich nicht in der Lage, hierüber genaue Angaben machen zu können. In einer kürzlich erschienenen Arbeit haben Hr. Professor Nichols und ich gezeigt<sup>1)</sup>, dass schon eine einzige Crownglaslinse beträchtliche Absorption in diesem Theil des Spectrums hervorbringen kann. Es ist daher zu vermuthen, dass die violetten Banden im Spectrum des Kohlenbogens noch weit intensiver sind, als sie nach den Angaben der Fig. 3 und 4, Taf. III erscheinen.

#### VII. Ueber die metallischen Linien.

Der sichtbare Theil des Natriumspectrums enthält eine Reihe von Linien, die noch optisch beobachtet werden können, deren Energie aber nicht ausreicht, um merklich auf das Bolometer zu reagiren. Im Gegensatz hierzu treten die beiden violetten Linien bei  $\lambda = 0,3932\mu$  und  $\lambda = 0,3967\mu$ , welche der Wellenlänge nach ungefähr den Fraunhofer'schen Linien  $H_1$  und  $H_2$  des Sonnenspectrums entsprechen, deutlich in der Zeichnung hervor. Die grüne Linie bei  $\lambda = 0,5685\mu$ , die gelbe bei  $\lambda = 0,5892\mu$  (D) und die rothe bei  $\lambda = 0,616\mu$  sind die stärksten des sichtbaren Gebiets. Im Ultraroth finden sich neben einer Reihe von schwächeren bei  $\lambda = 0,770\mu$ ,  $\lambda = 0,855\mu$ ,  $\lambda = 0,930\mu$ ,  $\lambda = 0,995\mu$ ,  $\lambda = 1,075\mu$ ,  $\lambda = 1,245\mu$ , zwei Linien von ungewöhnlicher Energie, nämlich bei  $\lambda = 0,818\mu$  und  $\lambda = 1,132\mu$ . Die erstere ist an Intensität ungefähr der D-Linie gleich und übertrifft dieselbe sogar in einigen Beobachtungsreihen. Ferner zeigt das Bolometer in dem Spectralgebiet zwischen  $\lambda = 1,70\mu$  und  $\lambda = 1,90\mu$  eine schwache Energiemenge, welche sich wohl bei geeigneter Einstellung des

---

1) Nichols and Snow, Phil. Mag. (5) 33. p. 380. 1892.



dagegen sind die rothen Linien bei  $\lambda = 0,775 \mu$  und  $\lambda = 0,791 \mu$ , Fig. 8 Taf. III, nach welchen das Rubidium genannt ist in Beziehung auf Energie die stärksten im Spectrum dieses Metall

Da in dem Spectrum des Caesiums sich die Andeutungen einiger Linien finden, welche offenbar dem Rubidium angehören, so die Gruppe bei  $\lambda = 0,4200 \mu$  und  $\lambda = 0,4230 \mu$ , halte ich es für zweifellos, dass dem benutzten Caesiumchlorid eine kleine Menge des entsprechenden Rubidiums Salzes beigemischt war. Es mögen daher auch die ultrarothten Linien des Caesiums etwas durch jenes Metall beeinflusst sein.

Die Herren Kayser und Runge haben bei ihren Spectrauntersuchungen<sup>1)</sup> eine angenäherte Schätzung der Intensität einzelner Linien vorgenommen und zu diesem Zweck eine aus 6 Nummern bestehende Helligkeitsscala eingeführt. Da ich in dem vorliegenden Fall aus den mitgetheilten Gründen annehmen darf, dass, vielleicht mit Ausnahme des violetten Spectralgebiets, die selective Absorption des Apparats keine grosse Rolle spielt, erscheint es mir gerechtfertigt, die Intensität der einzelnen Linien den beobachteten Ausschlägen direct proportional zu setzen. Es muss hierbei allerdings hinzugefügt werden, dass die Energie der äussersten ultrarothten Linien wegen mangelnder Schärfe stets etwas zu klein angedeutet wird, wie bereits oben hervorgehoben wurde.

Indess halte ich es nicht für angebracht, an den beobachteten Zahlen irgend welche Correction vorzunehmen, da dieser Einwand nur gegen die Intensitätsmessung einer sehr geringen Zahl von Linien erhoben werden kann und auch da die Fehler wahrscheinlich nicht gross sind. Ich habe daher in der folgenden Tabelle neben die Wellenlänge der einzelnen Linien ihre Intensität gesetzt, wie sie sich direct aus den Ordinaten der Curven, Fig. 5—9, Taf. IV und V, ergibt.

Das Maass der Energie ist freilich ein willkürliches, doch sind sämmtliche Linien aller untersuchten Metalle mit dem gleichen Maass gemessen, da die Stromstärke in der Lampe und die Empfindlichkeit des messenden Apparats nur sehr geringen Schwankungen unterworfen waren.

---

1) Kayser und Runge, Wied. Ann. 41. p. 306. 1890.

**Tabellen der Wellenlängen und Intensitäten.**  
**Tabelle X.**  
**Lithium.**

$\lambda$	I	$\lambda$	I
0,3913 $\mu$	10	0,4990 $\mu$	34
0,4140 „	58	0,6102 „	570
0,4238 „	11	0,670 „	1191
0,4288 „	10	0,811 „	296
0,4615 „	331	1,800(?) „	(?)

**Tabelle XI.**  
**Kalium.**

$\lambda$	I	$\lambda$	I	$\lambda$	I
0,4045 $\mu$	30	0,643 $\mu$	11	1,086 $\mu$	108
0,4233 „	16	0,691 „	74	1,155 „	395
0,5113 „	5	0,768 „	1443	1,220 „	205
0,5340 „	9	0,840 „	18	1,470 „	70
0,5362 „	6	0,885 „	13	1,500(?) „	50
0,5800 „	14	0,950 „	23		

**Tabelle XII.**  
**Natrium.**

$\lambda$	I	$\lambda$	I	$\lambda$	I
0,3932 $\mu$	31	0,5892 $\mu$	877	0,770 $\mu$	22
0,3967 „	31	0,616 „	91	0,818 „	660
0,4236 „	42	0,644 „	22	0,855 „	18
0,4677 „	11	0,671 „	26	0,930 „	8
0,4996 „	62	0,699 „	7	0,995 „	10
0,5164 „	12	0,710 „	14	1,075 „	13
0,5271 „	16	0,714 „	13	1,132 „	419
0,5600 „	19	0,720 „	12	1,245 „	30
0,5685 „	186	0,736 „	10	1,800(?) „	(?)

**Tabelle XIII.**  
**Rubidium.**

$\lambda$	I	$\lambda$	I	$\lambda$	I
0,4200 $\mu$	6	0,627 $\mu$	23	0,945 $\mu$	10
0,4230 „	8	0,669 „	11	0,997 „	151
0,5215 „	5	0,726 „	21	1,063 „	11
0,5270 „	6	0,737 „	19	1,090 „	13
0,5367 „	4	0,775 „	414	1,153 „	26
0,5435 „	4	0,791 „	443	1,224 „	13
0,5592 „	9	0,821 „	42	1,318 „	198
0,5710 „	7	0,845 „	50	1,475 „	102
0,607 „	8	0,878 „	60	1,520 „	71
0,616 „	12	0,913 „	11		

Tabelle XIV.  
Caesium.

$\lambda$	I	$\lambda$	I	$\lambda$	I
0,4200(?) <sup>μ</sup>	4	0,646 <sup>μ</sup>	10	0,900 <sup>μ</sup>	155
0,4230(?) <sup>μ</sup>	7	0,674 <sup>μ</sup>	46	0,995 <sup>μ</sup>	182
0,4565 <sup>μ</sup>	15	0,694 <sup>μ</sup>	63	1,150 <sup>μ</sup>	9
0,4600 <sup>μ</sup>	6	0,721 <sup>μ</sup>	47	1,205 <sup>μ</sup>	7
0,5528 <sup>μ</sup>	7	0,775 <sup>μ</sup>	175	1,323 <sup>μ</sup>	81
0,5635 <sup>μ</sup>	7	0,790 <sup>μ</sup>	107	1,420(?) <sup>μ</sup>	38
0,5828 <sup>μ</sup>	28	0,833 <sup>μ</sup>	297	1,450 <sup>μ</sup>	52
0,6010 <sup>μ</sup>	14	0,865 <sup>μ</sup>	151	1,520 <sup>μ</sup>	20
0,619 <sup>μ</sup>	23	0,882 <sup>μ</sup>	345	1,575 <sup>μ</sup>	8
0,629 <sup>μ</sup>	12				

Die zu Anfang erwähnten Untersuchungen des Hrn Becquerel liefern für die Wellenlängen der ultrarother Natrium- und Kalium-Linien die folgenden Wellenlängen, welche in der nachstehenden Tabelle neben die von mir beobachteten entsprechenden Werthe gesetzt sind.

Tabelle XV.

B e c q u e r e l		S n o w
Mit Hülfe des Prismas	Mit Hülfe des Gitters	Mit Hülfe des Prismas
Na $\lambda = 0,819^{\mu}$	$\lambda = 0,819^{\mu}$	$\lambda = 0,818^{\mu}$
$\lambda = 1,098^{\mu}$	$\lambda = 1,142^{\mu}$	$\lambda = 1,132^{\mu}$
K $\lambda = 0,770^{\mu}$	$\lambda = 0,770^{\mu}$	$\lambda = 0,768^{\mu}$
$\lambda = 1,003^{\mu}$		
$\lambda = 1,073^{\mu}$	$\lambda = 1,098^{\mu}$	$\lambda = 1,086^{\mu}$
$\lambda = 1,125^{\mu}$	$\lambda = 1,162^{\mu}$	$\lambda = 1,155^{\mu}$
$\lambda = 1,182^{\mu}$	$\lambda = 1,233^{\mu}$	$\lambda = 1,220^{\mu}$

Man erkennt, dass Hrn. Becquerel's Beobachtungen mit Hülfe des calibrirten Prismas meist beträchtlich kleinere Werthe ergeben, als sie von uns beobachtet wurden, während seine mittels Diffractionsgitter erhaltenen Resultate besonders für die grösseren Wellenlängen weit besser mit den unserigen übereinstimmen. Hr. Becquerel hebt selbst hervor, dass die Gitterbeobachtungen viel genauer seien, sodass die bessere Uebereinstimmung unserer Werthe mit letzteren als eine Bestätigung unserer Messungen anzusehen ist.





#### IV. *Zur absoluten Phasenänderung des Lichtes durch Reflexion; von Paul Glan.*

---

Im siebenten Bande von Wiedemann's Annalen habe ich Untersuchungen veröffentlicht, welche der Bestimmung der Grösse der absoluten Phasenänderung des Lichtes bei der Spiegelung dienten, und zwar in dem besonderen Falle, wenn das Licht parallel zur Einfallsebene polarisirt war und die Reflexion in Luft stattfand. Als Methode benutzte ich die in eigenartiger Weise angewandte Methode der Newton'schen Ringe, welche in solcher Weise in Anwendung gebracht wurde, dass sie zu fehlerfreien Resultaten in Betreff der Grösse der zu bestimmenden absoluten Phasenänderung führte. Ich habe eine grössere Anzahl von Körpern untersucht, und zwar sehr durchsichtige, wie Glas, Diamant und Quarz, dann stärker absorbirende, wie Selen und Eisenglanz, endlich Metalle und Körper mit Oberflächenfarben, wie Fuchsin Spiegel, Stahl und Silber.

Ich bestimmte dabei sowohl die betreffende absolute Phasenänderung in ihrer Abhängigkeit vom Einfallswinkel, als auch ihre Aenderung mit der Farbe des einfallenden Lichtes. Sie ergab sich hierbei gleich einer halben Wellenlänge für die durchsichtigen Körper bei allen Einfallswinkeln, wenigstens war sie von dieser Grösse um weniger unterschieden, als dem Betrag der Beobachtungsfehler der Methode entsprach. Nur beim Diamanten überstieg sie für kleine Einfallswinkel diesen Betrag etwas und für einen Einfallswinkel von  $20^\circ$  ergab sich für diesen Körper die entsprechende absolute Phasenänderung gleich  $0,522\lambda$ , also eine Phasenverzögerung, die etwa ein Fünftel Wellenlänge mehr betrug, als eine halbe Wellenlänge.

Das mässig absorbirende Selen zeigte dagegen mit Bestimmtheit eine Phasenverzögerung, welche vom Roth zum Blau zunahm und sich mit wachsendem Einfallswinkel verringerte. Beim Eisenglanz betrug sie für kleine Einfallswinkel  $0,544\lambda$  im Roth und stieg bis zu  $0,585\lambda$  im blauen Licht, während sie ebenfalls mit wachsendem Einfallswinkel abnahm.







so ist

$$\chi = (1,5 - \alpha) \lambda,$$

wenn

$$\alpha = \frac{1}{\frac{\varrho_2^2}{\varrho_1^2} - 1}$$

ist. Man kann hier  $\varphi$  nach meinen früheren Bestimmungen gleich Null setzen.

Zur Probe untersuchte ich zuerst eine senkrecht zur Axe geschliffene Fläche eines Quarzes, welche ich früher angewandt hatte. Ich führte alle Messungen bei kleinem Einfallswinkel aus, weil ich nach den früheren Bestimmungen wusste, dass für solche die zu messende Phasenänderung ihren grössten Werth hat. Der Einfallswinkel betrug in allen Beobachtungen  $21^\circ 48'$ .

Es ergab sich im Mittel aus zwei Bestimmungen für Quarz senkrecht zur Axe geschliffen:

$$\psi = 0,503 \lambda.$$

Ich hatte früher für den Einfallswinkel  $20^\circ$  gefunden:

$$\psi = 0,517 \lambda.$$

Die Wellenlänge dieser wie der folgenden Beobachtungen ist  $633\mu$ , die des durch eine roth gefärbte Glasplatte gegangenen Lichtes.

Ich untersuchte darauf eine *Kalkspatplatte senkrecht zur Axe* geschliffen. Es ergab sich im Mittel aus sieben Bestimmungen

$$\psi = 0,549 \lambda \pm 0,007 \lambda.$$

Der wahrscheinliche Fehler des Resultates ist durch das zweite Glied der rechten Seite des letzten Ausdruckes dargestellt. *Der durchsichtige Kalkspat zeigt danach wirklich an seinen senkrecht zu seiner Axe geschliffenen Flächen eine Phasenverzögerung bei der Spiegelung*; ich fand auch den Durchmesser des gut begrenzten dunklen Fleckes in der Mitte der Ringe, welcher der Stelle der Berührung von Glaslinse und Krystallplatte entspricht, für Quarz und Kalkspat gleich gross, soweit er sich wegen seiner meist zackigen Begrenzung bestimmen lässt. Er war für Quarz senkrecht zur Axe 107 Scalentheile der Trommel der Mikrometerschraube des Mikroskopes und für Kalkspat senkrecht zur Axe 97 solche Scalentheile. Bei der Unsicherheit, welche seiner Messung anhaftet, ist der Fleck danach von gleicher Grösse bei beiden









Die Coordinaten  $f, g, h$  der Ebenen, welche durch e Gerade  $x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2$  hindurchgehen und die Fläche berühren genügen den drei Relationen:

$F(f, g, h) = 0, x_1 f + y_1 g + z_1 h = 1, x_2 f + y_2 g + z_2 h =$   
Daraus folgt unmittelbar, dass die Wellenfläche bezüglich  $f, g, h$  vom vierten Grade sein muss.

Wir machen nun die Annahme, dass die Wellenfläche bezüglich drei zu einander senkrechter Ebenen ( $x = 0, y = z = 0$ ) symmetrisch sei. Daraus folgt, dass, wenn eine Berührungsebene die Abschnitte  $1/f, 1/g, 1/h$  auf den drei Axen bestimmt, vermöge der Symmetrie um die  $z = 0$ -Ebene eine Berührungsebene mit den Abschnitten  $1/f, 1/g, -1/h$  existiren muss. Genügt, mit anderen Worten gesagt,  $+f, +g, +h$ , so genügt auch  $+f, +g, -h$ . In der Gleichung vierten Grades können daher nur gerade Potenzen von  $h$  vorkommen. Ist auch die  $x = 0$ - und  $y = 0$ -Ebene eine Symmetrieebene, so reducirt sich die Gleichung der Wellenfläche auf

$$A f^4 + B g^4 + C h^4 + A' f^2 + B' g^2 + C' h^2 + A'' f^2 g^2 + B'' f^2 h^2 + C'' h^2 g^2 + 1 = 0.$$

3. Die Doppelbrechung erzeuge linear polarisirtes Licht. In der verschiedenen linearen Polarisation beider Lichtstrahlen wird man die nächstliegende Ursache ihrer verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeit erblicken. Für eine linear polarisirte ebene Welle werden offenbar die Wellennormale und die Richtung der Schwingung senkrecht zueinander sein; Annahme zu ihr senkrechte Schwingungsrichtung bevorzugen; ähnliches gilt von einer dritten Richtung, die auf beiden senkrecht steht, und Richtung der conjugirten Schwingungen heissen soll. Mit dem Ausdrucke Schwingungsrichtung soll keineswegs die Vorstellung einer materiellen Bewegung, sondern bloss eine Vectorrichtung gemeint sein. Grundhypothese, welche nun sowohl zur Feststellung der Wellenfläche, als auch zur Darstellung der Polarisationsverhältnisse vollkommen ausreicht, lautet:

a) Alle ebenen Wellen, deren Schwingungsrichtungen parallel sind, haben gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit, oder

b) alle ebenen Wellen mit parallelen conjugirten Schwingungsrichtungen besitzen gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit.



Die Wellennormale schliesse mit den drei Coor-  
 axen Winkel mit den Cosinussen  $l, m, n$  ein. Die vom Coor-  
 ursprung auf eine berührende Ebene gefällte Senkrechte  
 die Geschwindigkeit  $v$ .

Daraus folgt  $v = (1/f)l = (1/g)m = (1/h)n \dots$   
 $f = l/v, g = m/v, h = n/v$ .

Substituiert man diese Werthe in 1, so folgt die  
 Relation

$$(2) \quad \frac{l^2}{v^2 - a^2} + \frac{m^2}{v^2 - b^2} + \frac{n^2}{v^2 - c^2} = 0.$$

Es ist dies selbstverständlich wieder eine Gleichung  
 der Wellenfläche in Ebenencoordinaten  $l, m, n, v$ , da diese  
 die Lage der Berührungspunkte feststellen.

Von (2) aus gelangt man in bekannter Weise zur Gleichung  
 der Wellenflächen in Cartesischen Punktcoordinaten.

4. Es seien  $\lambda, \mu, \nu$  Cosinuse der directen (resp. conjugirten)  
 Schwingungsrichtung. Für Wellen, bei denen sich  $l, m, n$   
 $dl, dm, dn$  ändert, kann sich  $v$  nicht ändern, sobald  $v$   
 constant gehalten wird (laut Hypothese in Absatz 1).  
 bekommt hieraus drei Relationen:

$$l dl + m dm + n dn = 0$$

$$\lambda dl + \mu dm + \nu dn = 0$$

$$\frac{l}{v^2 - a^2} dl + \frac{m}{v^2 - b^2} dm + \frac{n}{v^2 - c^2} dn = 0.$$

Durch Elimination von  $dl, dm, dn$  und nach Passirung  
 der Ordnung folgt

$$(3) \quad \frac{lL}{v^2 - a^2} + \frac{mM}{v^2 - b^2} + \frac{nN}{v^2 - c^2} = 0,$$

wobei

$$(5) \quad \frac{L}{n\mu - \nu m} = \frac{M}{l\nu - \lambda n} = \frac{N}{m\lambda - \mu l}.$$

Offenbar sind  $L, M, N$  Richtungscosinuse einer Richtung,  
 die auf der Wellennormale  $l, m, n$  und der directen  
 conjugirten Schwingungsrichtung senkrecht steht.  
 und (3) folgt wegen

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\lambda}{nM - Nm} = \frac{\mu}{lN - Ln} = \frac{\nu}{mL - ml} \\ \frac{l}{v^2 - a^2} = \lambda \cdot K \\ \frac{m}{v^2 - b^2} = \mu \cdot K \\ \frac{n}{v^2 - c^2} = \nu \cdot K, \end{array} \right.$$

wobei  $K$  eine Proportionalitätsconstante bedeutet.

Aus (5) bekommt man

$$\frac{l}{\lambda} \cdot \frac{1}{K} = v^2 - a^2, \quad \frac{m}{\mu} \cdot \frac{1}{K} = v^2 - b^2, \quad \frac{n}{\nu} \cdot \frac{1}{K} = v^2 - c^2.$$

Hieraus

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} b^2 - a^2 = \frac{K'}{\lambda \mu \nu} \cdot \nu N \\ c^2 - b^2 = \frac{K'}{\lambda \mu \nu} \cdot \lambda L \\ a^2 - c^2 = \frac{K'}{\lambda \mu \nu} \cdot \mu M, \end{array} \right.$$

wobei  $K'$  eine neue Proportionalitätsconstante vorstellt.

Multipliziert man die Gleichung (5) folgeweise durch  $c^2$ ,  $a^2$ ,  $b^2$  und addirt, so folgt

$$(6) \quad a^2 \lambda L + b^2 \mu M + c^2 \nu N = 0.$$

Die Gleichung (6) hat eine einfache Bedeutung.

Das Ellipsoid  $a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1$  werde durch eine das Centrum desselben enthaltende Ebene geschnitten, die zur Wellenebene parallel ist. Es sind die Hauptaxen des Schnittes zu bestimmen. Zu einer solchen Hauptaxe sollen die Richtungs-cosinuse  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  gehören. Dann muss wegen  $x = \rho \lambda$ ,  $y = \rho \mu$ ,  $z = \rho \nu$  ein Maximum oder Minimum sein. Dies fordert

$$a^2 \lambda \cdot d\lambda + b^2 \mu d\mu + c^2 \nu d\nu = 0$$

$$\lambda \cdot d\lambda + \mu d\mu + \nu d\nu = 0$$

$$l \cdot d\lambda + m \cdot d\mu + n \cdot d\nu = 0.$$

Durch Elimination von  $d\lambda$ ,  $d\mu$ ,  $d\nu$  und nach Einführung der zu  $lmn$  und  $\lambda\mu\nu$  senkrechten Richtung  $LMN$  erhält man die Gleichung (6).

Die Schwingungsrichtungen des polarisirten Lichtes fallen demnach in die Hauptaxen des Schnittes, welchen eine zur Wellennormale senkrechte durch den Mittelpunkt des Ellipsoides  $a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1$  hindurchgehende Ebene mit ihm bestimmt.

Auch dieser Satz steht mit der Erfahrung in Uebereinstimmung.

Prag, Juli 1892.

---



unrichtig: davon überzeugt man sich am leichtesten, wenn man die von Tumlriz<sup>1)</sup> in seiner „Electromagnetischen Lichttheorie“ angestellten Grenzbedingungen untersucht. Tumlriz setzt auch überall das Potential gleich Null und bemerkt nicht dass seine Grenzbedingungen auf der Seite 92 untereinander im Widerspruch stehen. So folgt z. B. aus den Gleichungen (3 und (5), dass der Einfallswinkel dem Brechungswinkel gleich ist etc.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass man die Aufgabe der Reflexion resp. Brechung des Lichtes auf der Grenze von zwei Körpern vom Standpunkte der electrischen Lichttheorie nicht als gelöst anzusehen hat, und dass daher eine neue Untersuchung von allen Grenzbedingungen nicht ohne Interesse wird. Dieser Untersuchung ist die vorliegende Arbeit gewidmet; wir benutzen dabei die Gleichungen von v. Helmholtz, da dieselben uns dazu etwas besser geeignet zu sein scheinen.

### I. Isotrope Körper.

#### Allgemeine Gleichungen.

1. Es sei bezeichnet  $x', y', z', P, Q, R, u', v', w', \kappa', U, V', W', \lambda', \mu', \nu', \varrho', \mathfrak{M}', \mathfrak{N}', \chi', L', M', N'$  diejenigen Functionen, die v. Helmholtz  $x, y, z, \dots, L, M, N$  bezeichnet. Es seien ferner  $p', q', r'$  Componenten der „Ohm'schen“ Stromdichtigkeit,  $\epsilon$  und  $\vartheta$  Dielectrisirungs- resp. Magnetisirungsconstante eines isotropen Körpers,  $k$  Helmholtz'sche Constante,  $1/A = \mathfrak{B}_0 \sqrt{1 + 4\pi\vartheta_0} \sqrt{1 + 4\pi\epsilon_0}$ , worin  $\mathfrak{B}_0$  die Lichtgeschwindigkeit im Vacuum,  $\vartheta_0, \epsilon_0$  die Aetherconstanten bedeuten. Bezeichnen wir endlich  $\varphi'$  das electrostatische Gesamtpotential und setzen  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$  von v. Helmholtz gleich Null. Wenn  $\kappa'$  von Null verschieden ist, so denken wir uns  $\varphi'$  aus zwei Theilen  $f'$  und  $f_1'$  zusammengesetzt. Der erste Theil ist das Potential der dielectrischen Polarisation, mit  $x', y', z'$  durch die bekannten Beziehungen

$$\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \Delta f'$$

$$a(x' - x_1') + b(y' - y_1') + c(z' - z_1') = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial f'}{\partial n} - \frac{\partial f_1'}{\partial n} \right)$$

---

1) O. Tumlriz, Die electrom. Lichttheorie, Leipzig, 1883.





$$\begin{aligned}
r' &= r \sqrt{1 + 4\pi\epsilon_0} \text{ etc.} & P' &= \frac{P}{\sqrt{1 + 4\pi\epsilon_0}} \text{ etc.} \\
u' &= u \sqrt{1 + 4\pi\epsilon_0} \text{ etc.} & x' &= \frac{x}{\sqrt{1 + 4\pi\epsilon_0}} & \varphi' &= \frac{\varphi}{\sqrt{1 + 4\pi\epsilon_0}} \\
U' &= U \sqrt{1 + 4\pi\epsilon_0} \text{ etc.} \\
\lambda' &= \lambda \sqrt{1 + 4\pi\epsilon_0} \text{ etc.} & L' &= \frac{L}{\sqrt{1 + 4\pi\epsilon_0}} \text{ etc.} \\
\mathfrak{L}' &= \mathfrak{L} \sqrt{1 + 4\pi\epsilon_0} & \chi' &= \frac{\chi}{\sqrt{1 + 4\pi\epsilon_0}}.
\end{aligned}$$

Dann gehen die Gleichungen der v. Helmholtz's Electrodyamik in die folgenden über:

$$(1) \quad r = \frac{D}{4\pi} P, \quad \mathfrak{r} = \frac{D}{4\pi} Q, \quad \mathfrak{z} = \frac{D}{4\pi} R.$$

$$(2) \quad p = \frac{P}{x}, \quad q = \frac{Q}{x}, \quad r = \frac{R}{x}.$$

$$(3) \quad u = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t} + p, \quad v = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t} + q, \quad w = \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t} + r.$$

$$(4) \quad \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{1 + 4\pi\epsilon_0} \Delta f.$$

$$(5) \quad a(r - r_1) + b(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1) + c(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_1) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{1 + 4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\partial f}{\partial n} - \frac{\partial f}{\partial t} \right).$$

$$(6) \quad \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{1 + 4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \Delta f.$$

$$(7) \quad a(p - p_1) + b(q - q_1) + c(r - r_1) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{1 + 4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial f}{\partial n} - \frac{\partial f}{\partial t} \right).$$

$$(8) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{1 + 4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \varphi.$$

$$(9) \quad a(u - u_1) + b(v - v_1) + c(w - w_1) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{1 + 4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right).$$

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta U &= \frac{1 - k}{1 + 4\pi\epsilon_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - 4\pi u, \\ \Delta V &= \frac{1 - k}{1 + 4\pi\epsilon_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} - 4\pi v, \\ \Delta W &= \frac{1 - k}{1 + 4\pi\epsilon_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} - 4\pi w. \end{aligned} \right.$$

$$(11) \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = - \frac{k}{1 + 4\pi\epsilon_0} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{\vartheta}{1 + 4\pi\vartheta_0} \left( \mathfrak{L} - \frac{\partial \chi}{\partial x} \right), \quad \mu = \frac{\vartheta}{1 + 4\pi\vartheta_0} \left( \mathfrak{M} - \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) \\ \nu = \frac{\vartheta}{1 + 4\pi\vartheta_0} \left( \mathfrak{N} - \frac{\partial \chi}{\partial z} \right). \end{array} \right.$$

$$(13) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} = 0.$$

$$(14) \quad \Delta \chi = 0.$$

$$(15) \quad a(\lambda - \lambda_1) + b(\mu - \mu_1) + c(\nu - \nu_1) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{1 + 4\pi\vartheta_0} \left( \frac{\partial \chi}{\partial n} - \frac{\partial \chi_1}{\partial n} \right).$$

$$(16) \quad \Delta L = -4\pi\lambda, \quad \Delta M = -4\pi\mu, \quad \Delta N = -4\pi\nu.$$

$$(17) \quad \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = -\frac{\chi}{1 + 4\pi\vartheta_0}.$$

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{L} = \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right), \quad \mathfrak{M} = \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right), \\ \mathfrak{N} = \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right). \end{array} \right.$$

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{1}{1 + 4\pi\vartheta_0} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} \right), \\ Q = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{1}{1 + 4\pi\vartheta_0} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} \right), \\ R = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{1}{1 + 4\pi\vartheta_0} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} \right). \end{array} \right.$$

$$(20) \quad D = \frac{4\epsilon\pi}{1 + 4\pi\epsilon_0}.$$

Dabei ist angenommen, dass alle Functionen überall endlich sind und in der Unendlichkeit verschwinden; ferner müssen  $U, V, W$  und ihre ersten Derivirten, ebenso  $L, M, N$  und ihre ersten Derivirten,  $f, \mathfrak{f}, \varphi$  und  $\chi$  sich überall continuirlich ändern. Daraus folgt auch die Continuität von  $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  und  $P + \partial \varphi / \partial x, Q + \partial \varphi / \partial y, R + \partial \varphi / \partial z$ . Die Richtungen der  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Axen sind so ausgewählt, dass man z. B. von der  $+x$ - zur  $+y$ -Axe durch Drehen um einen rechten Winkel im Sinne des Uhrzeigers übergeht, für das Auge, das sich auf  $+z$  befindet.

3. Aus den Gleichungen (16) leiten wir nun leicht mit Hilfe (12) und (18) ab,

$$\Delta \left( \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} \right) = -4\pi \left( \frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\partial \nu}{\partial y} \right) = -\frac{4\pi \vartheta}{1 + 4\pi \vartheta_0} \left( \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} \right)$$

$$= -\frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{4\pi \vartheta}{1 + 4\pi \vartheta_0} \left\{ \Delta U - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right\}$$

und analoge Ausdrücke für  $\Delta(\partial N / \partial x - \partial L / \partial z)$  und  $\Delta(\partial L / \partial y - \partial M / \partial x)$ .

Setzt man weiter

$$(21) \quad U = U + \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad V = V + \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad W = W + \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

$$(22) \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0,$$

so folgt aus (11)

$$(23) \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \Delta \Phi = -\frac{k}{1 + 4\pi \epsilon_0} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

und

$$\Delta \left( \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} \right) = -\frac{4\pi \vartheta}{1 + 4\pi \vartheta_0} \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \Delta U$$

$$\Delta \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} \right) = -\frac{4\pi \vartheta}{1 + 4\pi \vartheta_0} \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \Delta V$$

$$\Delta \left( \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} \right) = -\frac{4\pi \vartheta}{1 + 4\pi \vartheta_0} \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \Delta W;$$

die Integration dieser Gleichungen führt zu den Beziehungen

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} = -\frac{4\pi \vartheta}{1 + 4\pi \vartheta_0} \frac{1}{\mathfrak{B}_0} U - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{1}{1 + 4\pi \vartheta_0}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} = -\frac{4\pi \vartheta}{1 + 4\pi \vartheta_0} \frac{1}{\mathfrak{B}_0} V - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{1}{1 + 4\pi \vartheta_0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{4\pi \vartheta}{1 + 4\pi \vartheta_0} \frac{1}{\mathfrak{B}_0} W - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{1}{1 + 4\pi \vartheta_0},$$

worin  $\Psi$  der Gleichung  $\Delta \Psi = 0$  genügt und eine später näher zu bestimmende Function darstellt.

Jetzt gehen die Gleichungen (19) in

$$(24) \quad \begin{cases} P = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{1 + 4\pi \vartheta}{1 + 4\pi \vartheta_0} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{1}{1 + 4\pi \vartheta_0} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} (\Phi + \Psi) \\ Q = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{1 + 4\pi \vartheta}{1 + 4\pi \vartheta_0} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{1}{1 + 4\pi \vartheta_0} \frac{\partial^2}{\partial t \partial y} (\Phi + \Psi) \\ R = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{1 + 4\pi \vartheta}{1 + 4\pi \vartheta_0} \frac{\partial W}{\partial t} - \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{1}{1 + 4\pi \vartheta_0} \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} (\Phi + \Psi) \end{cases}$$

über, und

$$(25) \quad \begin{cases} 4\pi \vartheta U + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ 4\pi \vartheta V + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ 4\pi \vartheta W + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \end{cases}$$

müssen continuirlich sein.

4. Differentiren wir die Gleichungen (24) resp. nach  $x$ ,  $y$ ,  $z$  und addiren sie, so folgt, wenn man (22) und (23) in Betracht zieht,

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = -\Delta \varphi + A^2 k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2};$$

in derselben Weise aus (1), (2), (3) berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= \left( \frac{D}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\kappa} \right) \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{1 + 4\pi \epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \varphi, \end{aligned}$$

woraus nach der Elimination von  $\partial P/\partial x + \partial Q/\partial y + \partial R/\partial z$  folgt

$$(26) \quad \frac{1}{1 + 4\pi \epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \varphi = \left( D \frac{\partial}{\partial t} + \frac{4\pi}{\kappa} \right) \left( -\Delta \varphi + A^2 k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right).$$

Damit ist  $\varphi$  bestimmt; setzt man weiter  $\Phi$  aus zwei Theilen  $\Phi'$ ,  $\Phi''$  zusammen, dessen  $\Phi'$  der Laplace'schen Gleichung

$$(27) \quad \Delta \Phi' = 0$$

genügt, so schliessen wir aus (23) das  $\Phi''$  auch der Gleichung (26) genügt, also ist

$$(28) \quad \frac{1}{1 + 4\pi \epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \Phi'' = \left( D \frac{\partial}{\partial t} + \frac{4\pi}{\kappa} \right) \left( -\Delta \Phi'' + A^2 k \frac{\partial^2 \Phi''}{\partial t^2} \right).$$

Endlich kann man  $u$ ,  $v$ ,  $w$  in (10) durch  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , und dann durch (24) ersetzen. Da nun aber aus (10) und (11) unmittelbar folgt

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{1}{1 + 4\pi \epsilon_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - 4\pi u \\ \Delta V &= \frac{1}{1 + 4\pi \epsilon_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} - 4\pi v \\ \Delta W &= \frac{1}{1 + 4\pi \epsilon_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} - 4\pi w \end{aligned}$$

und  $U$ ,  $V$ ,  $W$  resp.  $\varphi$  und  $\Phi''$  resp.  $\Phi'$  und  $\Psi$  durch verschiedene Differentialgleichungen bestimmt sind, so schliessen wir

$$(29) \frac{1}{1 + 4\pi\epsilon_0} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left( D \frac{\partial}{\partial t} + \frac{4\pi}{\kappa} \right) \left( -\varphi - \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{1}{1 + 4\pi\vartheta_0} \frac{\partial \Phi''}{\partial t} \right) = 0.$$

$$(30) \quad \Phi' + \Psi' = 0.$$

und

$$\Delta U = \left( D \frac{\partial}{\partial t} + \frac{4\pi}{\kappa} \right) \frac{M}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$\Delta V = \left( D \frac{\partial}{\partial t} + \frac{4\pi}{\kappa} \right) \frac{M}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\Delta W = \left( D \frac{\partial}{\partial t} + \frac{4\pi}{\kappa} \right) \frac{M}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{\partial W}{\partial t}$$

oder

$$(31) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\mathfrak{B}_0^2}{D M} \Delta U - \frac{4\pi M}{\kappa D} \frac{\partial U}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\mathfrak{B}_0^2}{D M} \Delta V - \frac{4\pi M}{\kappa D} \frac{\partial V}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\mathfrak{B}_0^2}{D M} \Delta W - \frac{4\pi M}{\kappa D} \frac{\partial W}{\partial t} \end{cases}$$

$$\frac{1 + 4\pi\vartheta}{1 + 4\pi\vartheta_0} = M.$$

Aus (22) und (31) ist leicht zu ersehen, dass  $U$ ,  $V$ ,  $W$  die electrischen Transversalschwingungen darstellen; dieselben wollen wir mit den Lichtschwingungen identificiren.

5. Es lässt sich nun zeigen, dass bei den Lichtschwingungen immer  $M = 1$ , also  $\vartheta = \vartheta_0$  sein muss.

In der That, aus (31) ist zu schliessen, dass  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N}$  durch ganz analoge Differentialgleichungen bestimmt sind, indem  $\chi$  die Schwingungen von unendlicher Geschwindigkeit darstellt; dann folgt aus (16), dass entweder  $L$ ,  $M$ ,  $N$  unendlich, oder  $\chi = 0$  sein muss. Da aber  $L$ ,  $M$ ,  $N$  jede als Potential einer stetigen Massenvertheilung gegeben ist, sodass z. B.

$$L = \iiint \frac{\lambda d\xi d\eta d\zeta}{r}$$

beträgt, so sind  $L$ ,  $M$ ,  $N$  überall endlich. Also haben wir

$$(32) \quad \chi = 0,$$

ferner aus (17)

$$(33) \quad \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0$$

und aus den Gleichungen (12) und (15) leiten wir ab



gegeben, worin  $ds$  ein Element der Grenzfläche bedeutet, und können  $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1)$  und  $a(p - p_1) + b(q - q_1) + c(r - r_1)$  nicht zusammen verschwinden, wenn  $a(u - u_1) + b(v - v_1) + c(w - w_1) = 0$  ist. Es müssen also  $f$  und selbst gross wie  $1 + 4\pi\epsilon_0$  sein. In den Dielectrics ist  $\kappa = \infty$  zu setzen; dann verschwindet  $f$ , weil  $p, q, r$  selbst Null werden. Auch ist dann  $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$ , obgleich  $f$  nicht verschwindet.<sup>1)</sup>

7. Nun gehen unsere Gleichungen (26) und (28) einfach in

$$(35) \quad \Delta \varphi = 0, \quad \Delta \Psi' = 0$$

über und die Gleichungen (29), (30) lassen sich in eine Gleichung verbinden, die lautet

$$\varphi + \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{1}{1 + 4\pi\mathfrak{D}_0} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi + \Psi) = 0.$$

Setzen wir endlich

$$\Phi + \Psi = (1 + 4\pi\mathfrak{D}_0) \Phi,$$

so folgt

$$\varphi + \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0,$$

und die Continuität der Ausdrücke (25) (bei  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0$ ) fällt mit der Continuität von  $U, V, W$  zusammen.

Die Gleichung (24) lautet dann

$$(37) \quad \begin{cases} P = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{\partial U}{\partial t} \\ Q = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{\partial V}{\partial t} \\ R = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{\partial W}{\partial t}. \end{cases}$$

Da  $\varphi$  continuirlich ist, so ist das auch mit  $\Phi$  der Fall.

---

1) Vgl. H. Poincaré, *Electricité et Optique* 2. Paris 1890. Auf den p. 56, 65 ff. ist offenbar  $\lambda$  mit unseren  $1 / (1 + 4\pi\epsilon_0)$  identisch, obgleich in der Abhandlung selbst der physikalische Sinn von  $\lambda$  nicht ganz klar ist.



Reflexion und Brechung.

8. Es sei nun die Grenzfläche eines isotropen durchsichtigen Körpers ( $D, \kappa = \infty$ ) und eines isotropen Leiters ( $D_1, \kappa_1$ ) für die  $y z$ -Ebene genommen; liegt das zweite Medium *unten* und richten wir die  $x$ -Axe nach *oben*, die  $y$ -Axe nach *links*, die  $z$ -Axe *rückwärts*, so stimmen diese Axenrichtungen mit dem in § 2 gesagten zusammen; wählen wir ferner die  $xy$ -Ebene für die Einfallsebene, in welcher sich im ersten Medium eine ebene geradlinig polarisirte Transversalwelle von der Periode  $T$  fortpflanzt; die Normale dieser Welle bilde mit der positiven  $x$ -Axenrichtung den Winkel  $\psi$ .

Dann kann man für diese einfallende Welle setzen

$$38) \left\{ \begin{array}{l} U = S \sin \psi \sin \omega e^{i\Theta}, \quad V = -S \cos \psi \sin \omega e^{i\Theta}, \\ W = S \cos \omega e^{i\Theta} \\ \Theta = 2\pi \left( \frac{x \cos \psi + y \sin \psi}{L} - \frac{t}{T} \right) \\ \varphi = 0, \quad \Phi = 0, \end{array} \right.$$

worin  $L = \mathfrak{B} T$  die Wellenlänge,  $\mathfrak{B}$  die Geschwindigkeit,  $\omega$  den Schwingungsazimuth bedeuten.

Für die reflectirte Welle ist ebenso

$$39) \left\{ \begin{array}{l} U_r = S_r \sin \psi_r \sin \omega_r e^{i\Theta_r}, \quad V_r = -S_r \cos \psi_r \sin \omega_r e^{i\Theta_r}, \\ W_r = S_r \cos \omega_r e^{i\Theta_r} \\ \Theta_r = 2\pi \left( \frac{x \cos \psi_r + y \sin \psi_r}{L} - \frac{t}{T} \right) \end{array} \right.$$

und für die gebrochene Welle

$$40) \left\{ \begin{array}{l} U_1 = S_1 \sin \psi_1 \sin \omega_1 e^{i\Theta_1}, \quad V_1 = -S_1 \cos \psi_1 \sin \omega_1 e^{i\Theta_1}, \\ W_1 = S_1 \cos \omega_1 e^{i\Theta_1} \\ \Theta_1 = 2\pi \left( \frac{x \cos \psi_1 + y \sin \psi_1}{L_1} - \frac{t}{T} \right). \end{array} \right.$$

Dabei müssen  $U_1, V_1, W_1$  den Gleichungen (31) Genüge leisten, wenn man darin  $M = 1, \mathfrak{B}_0^2 / D_1 = \mathfrak{B}_1^2$  setzt;  $U, V, W$  und  $U_r, V_r, W_r$  genügen auch denselben Gleichungen, nur müssen wir jetzt darin  $\kappa = \infty$  und  $\mathfrak{B}_0^2 / D = \mathfrak{B}$  annehmen.

Den Bedingungen

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial U_r}{\partial x} + \frac{\partial V_r}{\partial y} + \frac{\partial W_r}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z} = 0$$

ist offenbar identisch genügt. Ferner folgt aus (31)

$$\frac{L^2}{L_1^2} = \frac{D_1}{D} + i^2 \frac{T}{x_1}.$$

9. Wir können nicht  $\Phi_r$  resp.  $\Phi_1$  gleich Null setzen; aber diese Functionen den Laplace'schen Gleichungen

$$\Delta \Phi_r = 0, \quad \Delta \Phi_1 = 0$$

genügen, so setzen wir

$$\Phi_r = i \mathfrak{D}_r e^{i\psi_r}, \quad \Phi_1 = i \mathfrak{D}_1 e^{i\psi_1}$$

$$\psi_r = 2\pi \left( \frac{x \cos \theta_r + y \sin \theta_r}{l_r} - \frac{t}{T} \right), \quad \psi_1 = 2\pi \left( \frac{x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1}{l_1} - \frac{t}{T} \right)$$

$$l_r = l_1 = \infty.$$

Die Grenzbedingungen fordern nun ohne weiteres

$$(42) \quad \frac{\sin \psi}{L} = \frac{\sin \psi_r}{L_r} = \frac{\sin \psi_1}{L_1} = \frac{\sin \theta_r}{l_r} = \frac{\sin \theta_1}{l_1},$$

woraus folgt:

$$\psi_r = \pi - \psi, \quad \frac{\cos \theta_r}{l_r} = +i \frac{\sin \psi}{L}, \quad \frac{\cos \theta_1}{l_1} = -i \frac{\sin \psi}{L}.$$

Es bleibt uns also  $S_r, S_1, \omega_r, \omega_1, \mathfrak{D}_r, \mathfrak{D}_1$  zu bestimmen übrig. Dazu müssen die 13 Continuitätsgleichungen dieser es sind nämlich für  $x = 0$   $U, V, W$ , ihre ersten Derivirten  $\Phi$  continuirlich.

Nun sind  $\partial U / \partial z, \partial V / \partial z, \partial W / \partial z$  identisch Null; Continuität von  $\partial U / \partial y, \partial V / \partial y, \partial W / \partial y$  ist mit der Continuität von  $U, V, W$  infolge der Beziehungen (42) gleichbedeutend; ebenso ist die Continuität von  $\partial U / \partial x$  mit der von  $V$  infolge der Gleichung (22) identisch. Es bleibt uns somit nur die folgenden sechs Grenzbedingungen: für  $x$

$$\bar{U} + \bar{U}_r = \bar{U}_1; \quad \bar{V} + \bar{V}_r = \bar{V}_1; \quad \bar{W} + \bar{W}_r = \bar{W}_1; \quad \bar{\Phi}_r = \bar{\Phi}_1$$

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial x} = \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{W}_r}{\partial x} = \frac{\partial \bar{W}_1}{\partial x}.$$

10. Die Substitution ergibt nun nach leichten Vereinfachungen

$$(S \sin \omega + S_r \sin \omega_r) \sin \psi = S_1 \sin \psi_1 \sin \omega_1 + 4 \pi i \mathfrak{D}_r \frac{\sin \psi}{L}$$

$$(S \sin \omega - S_r \sin \omega_r) \cos \psi = S_1 \cos \psi_1 \sin \omega_1$$

$$S \cos \omega + S_r \cos \omega_r = S_1 \cos \omega_1$$

$$(S \sin \omega + S_r \sin \omega_r) \frac{\cos^2 \psi}{L} = S_1 \sin \omega_1 \frac{\cos^2 \psi_1}{L_1} - 4 \pi i \mathfrak{D}_r \frac{\sin^2 \psi}{L}$$

$$(S \cos \omega - S_r \cos \omega_r) \frac{\cos \psi}{L} = S_1 \cos \omega_1 \frac{\cos \psi_1}{L_1}$$

$$\mathfrak{D}_r = \mathfrak{D}_1,$$

woraus nach der Elimination von  $\mathfrak{D}_r$  folgt

$$S \sin \omega + S_r \sin \omega_r = S_1 \sin \omega_1 \frac{\sin \psi}{\sin \psi_1}$$

$$S \sin \omega - S_r \sin \omega_r = S_1 \sin \omega_1 \frac{\cos \psi}{\cos \psi_1}$$

$$S \cos \omega + S_r \cos \omega_r = S_1 \cos \omega_1$$

$$S \cos \omega - S_r \cos \omega_r = S_1 \cos \omega_1 \frac{\cos \psi_1 \sin \psi}{\cos \psi \sin \psi_1}$$

und endlich

$$(43) \quad \begin{cases} S_r \sin \omega_r = S \sin \omega \frac{\operatorname{tg}(\psi - \psi_1)}{\operatorname{tg}(\psi + \psi_1)}; \\ S_1 \sin \omega_1 = S \sin \omega \frac{2 \sin \psi_1 \cos \psi}{\sin(\psi + \psi_1) \cos(\psi - \psi_1)}; \\ S_r \cos \omega_r = S \cos \omega \frac{\sin(\psi_1 - \psi)}{\sin(\psi + \psi_1)}; \\ S_1 \cos \omega_1 = S \cos \omega \frac{2 \sin \psi_1 \cos \psi}{\sin(\psi + \psi_1)}. \end{cases}$$

Für reelles  $\psi_1$ , d. h. im Falle von zwei durchsichtigen Medien ( $\kappa_1 = \infty$ ,  $L_1$  reell), sind das die Fresnel'schen Formeln der Reflexion und Brechung des Lichtes; bei endlichem  $\kappa_1$  ( $L_1, \psi_1$  complex) sind  $\omega_r, \omega_1$  complex und wir bekommen die Cauchy'schen Formeln der metallischen Reflexion, wenn wir das Reelle vom Imaginären trennen.<sup>1)</sup>

Somit sind alle Grenzbedingungen für  $U, V, W, \varphi$ , also auch für  $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \lambda, \mu, \nu$  und  $u$  erfüllt. Es bleibt uns noch die  $L, M, N$  zu untersuchen.

1) Vgl. Eisenlohr, Pogg. Ann. 104. p. 346. 1858.

11. Wir setzen

$$L = L' + L'', \quad M = M' + M'', \quad N = N' + N'',$$

worin

$$\Delta L' = 0, \quad \Delta M' = 0, \quad \Delta N' = 0$$

ist, und bekommen infolge der Gleichungen (16)

$$\Delta L'' = -4\pi\lambda, \quad \Delta M'' = -4\pi\mu, \quad \Delta N'' = -4\pi\nu.$$

Was nun die einfallende Welle anbetrifft, so können wir dem Früheren analog für dieselbe  $L' = M' = N' = 0$  setzen. Dann bleiben uns noch  $L_r', M_r', N_r'$  und  $L_1', M_1', N_1'$ ; dabei ergeben die Gleichungen (17), dass

$$(44) \quad \frac{\partial L_r'}{\partial x} + \frac{\partial M_r'}{\partial y} + \frac{\partial N_r'}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial L_1'}{\partial x} + \frac{\partial M_1'}{\partial y} + \frac{\partial N_1'}{\partial z} = 0.$$

ist. Wir berechnen nun leicht

$$\begin{aligned} L &= \frac{L^2}{\pi} \lambda, & M &= \frac{L^2}{\pi} \mu, & N &= \frac{L^2}{\pi} \nu, \\ L_r &= \frac{L^2}{\pi} \lambda_r + L_r', & M_r &= \frac{L^2}{\pi} \mu_r + M_r', & N_r &= \frac{L^2}{\pi} \nu_r + N_r', \\ L_1 &= \frac{L^2}{\pi} \lambda_1 + L_1', & M_1 &= \frac{L^2}{\pi} \mu_1 + M_1', & N_1 &= \frac{L^2}{\pi} \nu_1 + N_1' \end{aligned}$$

und zur Bestimmung von 6 Unbekannten, d. h.  $L_r', M_r', N_r', L_1', M_1', N_1'$  haben wir die Continuitätsgleichungen

$$(45) \quad \begin{cases} L + L_r = L_1, & M + M_r = M_1, & N + N_r = N_1 \\ \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial M_r}{\partial x} = \frac{\partial M_1}{\partial x}, & \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial N_r}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x} \end{cases}$$

und noch zwei Gleichungen (44), im ganzen also sieben Gleichungen, da die Continuitätsbedingungen von  $\partial L / \partial x$ ,  $\partial L / \partial y$ ,  $\partial M / \partial y$ ,  $\partial N / \partial y$ ,  $\partial L / \partial z$ ,  $\partial M / \partial z$ ,  $\partial N / \partial z$  nichts Neues geben.

Wir können setzen

$$\begin{aligned} L_r' &= i \mathfrak{E}_r^l e^{i\psi_r}, & L_1' &= i \mathfrak{E}_1^l e^{i\psi_1}; \\ M_r' &= i \mathfrak{E}_r^m e^{i\psi_r}, & M_1' &= i \mathfrak{E}_1^m e^{i\psi_1}; \end{aligned}$$

dann folgt aus den Gleichungen (44)

$$(46) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}^m = -i \mathfrak{E}_r^l \\ \mathfrak{E}_1^m = -i \mathfrak{E}_1^l \end{cases}$$



2. In keiner Weise ist  $\varphi$  resp.  $\Phi$  gleich Null zu setzen. Daher sind alle bisher publicirten Untersuchungen über die electrische Lichttheorie theils unvollständig, theils aber unrichtig.

3. Der Vector  $U, V, W$  verhält sich in der electrischen Lichttheorie gerade so, wie die Verschiebung in der Green'schen mechanischen Lichttheorie des incompressiblen Aethers. Bezeichne man mit  $v$  die unendliche Geschwindigkeit der longitudinalen (richtiger Oberflächen-) Wellen in einem durchsichtigen isotropen Körper, so kann man leicht die Differentialgleichungen für  $U, V, W$  ableiten

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= \mathfrak{B}^2 \Delta U + (v^2 - \mathfrak{B}^2) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= \mathfrak{B}^2 \Delta V + (v^2 - \mathfrak{B}^2) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= \mathfrak{B}^2 \Delta W + (v^2 - \mathfrak{B}^2) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right),\end{aligned}$$

die mit den Differentialgleichungen für die mechanische Verschiebung identisch sind.

4. In der Theorie von v. Helmholtz besitzt  $\varphi$  auch bei  $\epsilon_0 = \infty$  einen ganz bestimmten physikalischen Sinn; das ist Potential der electrostatischen Ladung, die von der Induction unabhängig ist. Dieses Potential wird gerade compensirt durch das Potential derjenigen Ladung, die durch die Induction verursacht ist, sodass das Gesamtpotential eines isotropen Körpers immer Null ist.

In der Theorie von Maxwell ist durch  $\Psi = \partial \chi / \partial t$  eine Function bezeichnet, die eine unserem  $\varphi$  vollkommen analoge Rolle spielt. Nur ist diese Function von rein analytischer Natur; ihre physikalische Bedeutung mag man vielleicht in der periodischen Electrisirung aller Körper bei der Belichtung suchen.

5. Setzt man  $\mu = 1$  in den Maxwell'schen Gleichungen und misst man  $P, \dots u, \dots F, G, H$  electrostatisch, so sind unsere  $U, V, W$  bei  $\epsilon_0 = \infty$  mit  $F', G', H'$  von Maxwell identisch. Dadurch werden unsere  $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  mit den Maxwell'schen  $\alpha, \beta, \gamma$  zusammenfallen. Die angegebene Lösung der Aufgabe der Reflexion und der Brechung auf der Grenze von zwei isotropen Körpern ist daher für die beiden Theorien gültig.



$u, v, w, P, Q, R, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  etc. bei den electrischen resp. b den Lichtschwingungen nur geschwächt durch einen Leit gehen.

In der That, stelle man sich eine ebene metallische Platte vor, auf welche eine ebene Transversalwelle fällt. Es sei  $d$  Plattendicke gleich  $d$ , die Platte unbegrenzt und von der Luft umgeben. Dann lassen sich die Amplituden und Phasen der durchgegangenen Welle gerade in derselben Weise berechnen wie das Lord Rayleigh <sup>1)</sup> in der mechanischen Lichttheorie gethan hatte. Eine solche Rechnung durchzuführen biete uns kein Interesse dar. Wir bemerken nur, dass jeder Vector in der durchgegangenen Welle einen Schwächungsfactor (Absorptionsfactor) besitzt, dessen Werth sich durch den Ausdruck

$$e^{-\frac{2\pi d}{L} \frac{cF \sin(o+s)}{L}}$$

darstellen lässt, worin  $L$  die Wellenlänge in der Luft bedeutet,  $F$  und  $o$  die sogenannten optischen Constanten des Metalls sind und  $c, s$  mit dem Brechungswinkel (an der ersten Grenzfläche)  $\psi_1$  durch die Beziehung

$$\cos \psi_1 = c e^{is}$$

verbunden sind.

Bezeichne man weiter mit  $L_1$  die Wellenlänge im Metalle und setze

$$\frac{L^2}{L_1^2} = F^2 e^{2io},$$

so folgt aus der Beziehung

$$\frac{L^2}{L_1^2} = \frac{D_1}{D} + i \frac{2T}{x_1 D}$$

einfach

$$F^2 \cos 2o = \frac{D_1}{D}, \quad F^2 \sin 2o = \frac{2T}{x_1 D}$$

oder

$$F^2 \cos 2o = D_1, \quad F^2 \sin 2o = \frac{2T}{x_1},$$

wenn  $D = 1$  ist.

Für normale Incidenz beträgt  $\cos \psi_1 = -1$ , also  $c = -1$ ,  $s = 0$  und unser Factor wird einfach

---

1) J. W. Strutt, Phil. Mag. (4) 43. p. 335. 1872.



$$e^{-2\pi d \frac{F \sin o}{L}},$$

orin

$$F \sin o = \sqrt{D_1^2 + \left(\frac{2T}{\kappa_1}\right)^2} - \frac{D_1}{2}$$

t. Nun wollen wir diesen Factor in zwei Fällen berechnen, nämlich wenn  $L$  der  $D$ -Linie des Spectrums und wenn  $L$  die Wellenlänge der electrischen Schwingungen bei den Hertz'schen Versuchen entspricht. Als Metall nehmen wir beispielsweise Zink.

Für den ersten Fall beträgt  $F \sin o$  nach Quincke's Beobachtungen 5,48,  $L = 0,5889 \cdot 10^{-4}$  cm. Daraus folgt

$$e^{2\pi d \frac{F \sin o}{L}} = e^{-5,8 \cdot 10^8 \cdot d}.$$

Im zweiten Falle, für die Wellenlänge, welche etwa  $10^8$  mal kleiner ist, kennen wir entweder  $D_1$  noch  $1/\kappa_1$ . Nun ist aber für Zink: für  $D$ -Linie  $1/\kappa_1 = 6,58 \cdot \mathfrak{B}_0^2 \cdot 10^{-6}$  und für unendliche Wellenlänge (stationäre Vorgänge)  $1/\kappa_1 = 1,9 \cdot \mathfrak{B}_0^2 \cdot 10^{-4}$ . Wir schliessen daraus, dass auch unser unbekanntes  $1/\kappa_1$  zwischen  $0,07 \cdot \mathfrak{B}_0^2 \cdot 10^{-4}$  und  $1,1 \cdot \mathfrak{B}_0^2 \cdot 10^{-4}$  liegt. Benutzen wir nun den für uns ungünstigen, ersten Werth von  $1/\kappa_1$ , so folgt für  $L = 0,5889 \cdot 10^{-4}$  cm

$$\frac{2T}{\kappa_1} = 0,13 \cdot 0,5889 \cdot \mathfrak{B}_0.$$

Diese Zahl ist so gross, dass wir  $D_1^2$  gegen  $(2T/\kappa_1)^2$  auch vernachlässigen können, wenn wir für  $D_1$  einen so unheimlich grossen Werth wählen, wie z. B.  $10^8$ . In dieser Weise berechnen wir für die Hertz'schen Schwingungen

$$F \sin o = 1,1 \cdot 10^9, \quad e^{2\pi d \frac{F \sin o}{L}} = e^{-1,1 \cdot 10^8 \cdot d}.$$

Daraus ergibt sich offenbar, dass in beiden Fällen jede Bewegung auf anderer Seite der Platte nur dann verschwindet, wenn die Plattendicke genügend gross im Vergleich mit  $10^{-5}$  cm ist; andernfalls bleibt die Platte für die Schwingungen immerhin maassvoll durchgänglich.

Bei den Untersuchungen über die Durchsichtigkeit der Metalle für die Lichtstrahlen braucht man gewöhnlich sehr dünne Metallschichten zu nehmen (Dicke von der Ordnung der Lichtwellenlänge); bei den Hertz'schen Schwingungen

aber werden Metallplatten nicht viel dünner etwa als 1 mm nutzt: solche Platten sollen für die Strahlen der electrischen Lichtstrahlen vollkommen undurchgänglich sein, und das thun sie bekanntlich.

Es sind somit alle Beobachtungsergebnisse über Durchgang der Licht- resp. Electricitätsstrahlen durch Metallplatten mit den Resultaten der electrischen Lichttheorie im vollkommenen Einklang.

## II. Krystallinische Körper.

### Allgemeine Gleichungen.

14. Wir beschäftigen uns nur mit jenen Krystallen drei Symmetriemaxen besitzen; diese Axen sollen als Coordinatenaxen  $x, y, z$  dienen. Ferner nehmen wir an, die Symmetrie in Bezug auf die dielectrische Polarisation derselben der „Ohm'schen“ Leitung zusammenfällt. Sind die lichtabsorbirenden Krystalle des mono- resp. klinischen Systems aus unserer Untersuchung ausgeschlossen. Endlich setzen wir, ebenso wie im Falle der isotropen Körper  $\epsilon_0 = \infty, \vartheta = \vartheta_0$ .

Dann bleiben unsere Gleichungen (3) bis (32), (36) in Gültigkeit, weil dieselben bei  $\vartheta = \vartheta_0$  in sich keine Constanten des Mediums enthalten; nur die Gleichungen (1) und (2) müssen anders geschrieben werden.

Es seien nämlich  $D_x, D_y, D_z$  die Dielectricitätsconstanten des Mediums  $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z$  die specifischen Widerstände desselben in den Richtungen der Symmetriemaxen  $x, y, z$ ; dann setzen wir in bekannter Weise

$$(47) \quad x = \frac{D_x}{4\pi} P, \quad y = \frac{D_y}{4\pi} Q, \quad z = \frac{D_z}{4\pi} R$$

$$(48) \quad p = \frac{P}{\kappa_x}, \quad q = \frac{Q}{\kappa_y}, \quad r = \frac{R}{\kappa_z},$$

woraus mit Hülfe der Gleichung (3) die symbolischen Beziehungen

$$(49) \quad \begin{cases} u = \left( \frac{D_x}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\kappa_x} \right) P, & v = \left( \frac{D_y}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\kappa_y} \right) Q, \\ w = \left( \frac{D_z}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\kappa_z} \right) R \end{cases}$$

folgen. Nun lassen sich  $u, v, w$  aus den Gleichungen

$$\Delta U = -4\pi u, \quad \Delta V = -4\pi v, \quad \Delta W = -4\pi w$$

eliminiren, und wir bekommen

$$(50) \left\{ \begin{array}{l} \Delta U = - \left( D_x \frac{\partial}{\partial t} + \frac{4\pi}{x_x} \right) P, \quad \Delta V = - \left( D_y \frac{\partial}{\partial t} + \frac{4\pi}{x_y} \right) Q, \\ \Delta W = - \left( D_z \frac{\partial}{\partial t} + \frac{4\pi}{x_z} \right) R, \end{array} \right.$$

indem  $P, Q, R$  durch (37)

$$(51) \left\{ \begin{array}{l} P = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{\partial U}{\partial t} \\ Q = - \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{\partial V}{\partial t} \\ R = - \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{\partial W}{\partial t} \end{array} \right.$$

gegeben sind. Die Elimination von  $P, Q, R$  ergibt unmittelbar

$$\begin{aligned} \Delta U &= \left( D_x \frac{\partial}{\partial t} + \frac{4\pi}{x_x} \right) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{\partial U}{\partial t} \right) \\ \Delta V &= \left( D_y \frac{\partial}{\partial t} + \frac{4\pi}{x_y} \right) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) \\ \Delta W &= \left( D_z \frac{\partial}{\partial t} + \frac{4\pi}{x_z} \right) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{\partial W}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Weiter bemerken wir Folgendes. Bei den isotropen Körpern hatten wir  $\partial P / \partial x + \partial Q / \partial y + \partial R / \partial z = 0$ , woraus  $\Delta \varphi = 0$  folgte; jetzt bekommen wir aus (49), indem wir dieselben resp. nach  $x, y, z$  differentiren und addiren

$$\left( D_x \frac{\partial}{\partial t} + \frac{4\pi}{x_x} \right) \frac{\partial P}{\partial x} + \left( D_y \frac{\partial}{\partial t} + \frac{4\pi}{x_y} \right) \frac{\partial Q}{\partial y} + \left( D_z \frac{\partial}{\partial t} + \frac{4\pi}{x_z} \right) \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

Es kann daher  $\partial P / \partial x + \partial Q / \partial y + \partial R / \partial z$  nicht mehr Null sein. Daraus schliessen wir, dass in keiner Weise  $\Delta \varphi = 0$  zu setzen ist, sodass wir uns  $\varphi$  aus zwei Theilen zusammengesetzt,  $\varphi' + \varphi''$ , denken müssen, dessen  $\varphi'$  der Laplace'schen Gleichung  $\Delta \varphi' = 0$  Genüge leistet.

Da nun  $U, V, W$  selbst einer solchen Gleichung nicht genügen, so schliessen wir, dass

$$(52) \quad \varphi' + \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

wird und demgemäss

$$\begin{aligned}\Delta U &= \left( D_x \frac{\partial}{\partial t} + \frac{4\pi}{x_x} \right) \left( \frac{\partial \varphi''}{\partial x} + \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{\partial U}{\partial t} \right) \\ \Delta V &= \left( D_y \frac{\partial}{\partial t} + \frac{4\pi}{x_y} \right) \left( \frac{\partial \varphi''}{\partial y} + \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) \\ \Delta W &= \left( D_z \frac{\partial}{\partial t} + \frac{4\pi}{x_z} \right) \left( \frac{\partial \varphi''}{\partial z} + \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{\partial W}{\partial t} \right),\end{aligned}$$

worin  $\varphi''$  eine Function von derselben Art wie  $U, V, W$  bedeutet.

16. Bei den periodischen Vorgängen hängen bekanntlich  $U, V, W$  von der Zeit nur in der Weise ab, dass sie den Factor

$$e^{-2\pi i \frac{t}{T}}$$

enthalten, daraus folgt, dass symbolisch

$$\begin{aligned}D_x \frac{\partial}{\partial t} + \frac{4\pi}{x_x} &= D_x \frac{2\pi i}{T} + \frac{4\pi}{x_x} = -\frac{2\pi i}{T} \left( D_x + i \frac{2T}{x_x} \right) \\ &= \left( D_x + i \frac{2T}{x_x} \right) \frac{\partial}{\partial t}\end{aligned}$$

etc. und folglich

$$\begin{aligned}\Delta U &= \left( D_x + i \frac{2T}{x_x} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi''}{\partial t \partial x} + \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right) \\ \Delta V &= \left( D_y + i \frac{2T}{x_y} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi''}{\partial t \partial y} + \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right) \\ \Delta W &= \left( D_z + i \frac{2T}{x_z} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi''}{\partial t \partial z} + \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right),\end{aligned}$$

oder wenn wir setzen

$$(53) \quad \frac{\mathfrak{B}_0^2}{D_x + i \frac{2T}{x_x}} = \mathfrak{B}_x^2, \quad \frac{\mathfrak{B}_0^2}{D_y + i \frac{2T}{x_y}} = \mathfrak{B}_y^2, \quad \frac{\mathfrak{B}_0^2}{D_z + i \frac{2T}{x_z}} = \mathfrak{B}_z^2,$$

so folgt

$$(54) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \mathfrak{B}_x^2 \Delta U - \mathfrak{B}_0^2 \frac{\partial^2 \varphi''}{\partial t \partial x} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \mathfrak{B}_y^2 \Delta V - \mathfrak{B}_0^2 \frac{\partial^2 \varphi''}{\partial t \partial y} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \mathfrak{B}_z^2 \Delta W - \mathfrak{B}_0^2 \frac{\partial^2 \varphi''}{\partial t \partial z} \end{cases}$$

Durch das Differentiren dieser Gleichung resp. nach  $x, y, z$  und Addiren lässt sich  $\varphi''$  bestimmen und zwar ist

$$\text{oder} \quad \mathfrak{V}_0^2 \Delta \frac{\partial \varphi''}{\partial t} = \Delta \left( \mathfrak{V}_x^2 \frac{\partial U}{\partial x} + \mathfrak{V}_y^2 \frac{\partial V}{\partial y} + \mathfrak{V}_z^2 \frac{\partial W}{\partial z} \right)$$

$$55) \quad \mathfrak{V}_0^2 \frac{\partial \varphi''}{\partial t} = \mathfrak{V}_x^2 \frac{\partial U}{\partial x} + \mathfrak{V}_y^2 \frac{\partial V}{\partial y} + \mathfrak{V}_z^2 \frac{\partial W}{\partial z},$$

so dass die Gleichungen (53) übergehen in

$$56) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \mathfrak{V}_x^2 \Delta U - \frac{\partial}{\partial x} \left( \mathfrak{V}_x^2 \frac{\partial U}{\partial x} + \mathfrak{V}_y^2 \frac{\partial V}{\partial y} + \mathfrak{V}_z^2 \frac{\partial W}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \mathfrak{V}_y^2 \Delta V - \frac{\partial}{\partial y} \left( \mathfrak{V}_x^2 \frac{\partial U}{\partial x} + \mathfrak{V}_y^2 \frac{\partial V}{\partial y} + \mathfrak{V}_z^2 \frac{\partial W}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \mathfrak{V}_z^2 \Delta W - \frac{\partial}{\partial z} \left( \mathfrak{V}_x^2 \frac{\partial U}{\partial x} + \mathfrak{V}_y^2 \frac{\partial V}{\partial y} + \mathfrak{V}_z^2 \frac{\partial W}{\partial z} \right). \end{cases}$$

Dabei sind  $\mathfrak{V}_x, \mathfrak{V}_y, \mathfrak{V}_z$  allgemein complex; sie sind reell nur bei  $\kappa_x = \kappa_y = \kappa_z = \infty$ , was dem Falle eines durchsichtigen Krystalls entspricht; dann bedeuten offenbar  $\mathfrak{V}_x, \mathfrak{V}_y, \mathfrak{V}_z$  die Lichtgeschwindigkeiten in der Richtung der Symmetrieachsen. Natürlich können wir  $\mathfrak{V}_x, \mathfrak{V}_y, \mathfrak{V}_z$  auch dann als die Geschwindigkeiten betrachten, wenn sie complex sind; die abgeleiteten Differentialgleichungen sind daher so gut auf die durchsichtigen, wie auf die leitenden Krystalle anwendbar.

Die Untersuchung der letzten Körperklasse würde uns zu weit führen. Wir behalten daher dieselbe für eine andere Gelegenheit vor und begnügen uns jetzt im weiteren nur mit den durchsichtigen Krystallen.

17. Es sei bezeichnet:  $\alpha, \beta, \gamma$  die Richtungscosinus der Normale einer ebenen Welle, die sich im Inneren des Krystalls mit der Geschwindigkeit  $\mathfrak{V} = L / T$  fortpflanzt;  $S$  — der Vector mit Componenten  $U, V, W$  und  $a, b, c$  dessen Richtungscosinus in Bezug auf  $x-, y-, z$ -Axen. Dann ist

$$57) \quad U = aS, \quad V = bS, \quad W = cS; \quad S = Se^{2\pi i \left( \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{L} - \frac{t}{T} \right)}$$

und aus den Gleichungen (55) leiten wir ab

$$\frac{\alpha}{\mathfrak{V}^2 - \mathfrak{V}_x^2} = - \frac{a}{a\alpha\mathfrak{V}_x^2 + b\beta\mathfrak{V}_y^2 + c\gamma\mathfrak{V}_z^2}$$

$$\frac{\beta}{\mathfrak{V}^2 - \mathfrak{V}_y^2} = - \frac{b}{a\alpha\mathfrak{V}_x^2 + b\beta\mathfrak{V}_y^2 + c\gamma\mathfrak{V}_z^2}$$

$$\frac{\gamma}{\mathfrak{V}^2 - \mathfrak{V}_z^2} = - \frac{c}{a\alpha\mathfrak{V}_x^2 + b\beta\mathfrak{V}_y^2 + c\gamma\mathfrak{V}_z^2}$$

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$$

und weiter

$$(58) \quad \frac{\alpha^2}{\mathfrak{V}^2 - \mathfrak{V}_x^2} + \frac{\beta^2}{\mathfrak{V}^2 - \mathfrak{V}_y^2} + \frac{\gamma^2}{\mathfrak{V}^2 - \mathfrak{V}_z^2} = 0$$

$$(59) \quad \frac{\alpha}{a} (\mathfrak{V}_y^2 - \mathfrak{V}_z^2) + \frac{\beta}{b} (\mathfrak{V}_z^2 - \mathfrak{V}_x^2) + \frac{\gamma}{c} (\mathfrak{V}_x^2 - \mathfrak{V}_y^2) = 0$$

$$(60) \quad a^2 \mathfrak{V}_x^2 + b^2 \mathfrak{V}_y^2 + c^2 \mathfrak{V}_z^2 = \mathfrak{V}^2.$$

Das sind die bekannten Gleichungen der gewöhnlichen Lichttheorie. Es fallen die Richtungen von  $U, V, W, u, x, y, z$  zusammen;  $\mathfrak{V}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \lambda, \mu, \nu$  stehen senkrecht. Die electromotorische Kraft ( $P, Q, R$ ) liegt in der „Schwingenebene“, mit welcher  $S$  und die Wellennormale zusammenfallen; dabei steht  $P, Q, R$  senkrecht zum Strahle.

Wenn  $a, b, c$  die Richtungscosinus des Strahles und  $d$  den Winkel desselben mit der Wellennormale bedeuten, folgen leicht die bekannten Gleichungen

$$(61) \quad \begin{cases} a^2 \mathfrak{V}_x^2 + b^2 \mathfrak{V}_y^2 + c^2 \mathfrak{V}_z^2 = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ \frac{a b - b a}{\alpha b - \beta a} = \frac{c a - a c}{\gamma a - \alpha c} = \frac{b c - c b}{\beta c - \gamma b} \end{cases}$$

und

$$(62) \quad \begin{aligned} \sin d &= - \frac{a \alpha \mathfrak{V}_x^2 + b \beta \mathfrak{V}_y^2 + c \gamma \mathfrak{V}_z^2}{\sqrt{a^2 \mathfrak{V}_x^4 + b^2 \mathfrak{V}_y^4 + c^2 \mathfrak{V}_z^4}} \\ \cos d &= \frac{\mathfrak{V}^2}{\sqrt{a^2 \mathfrak{V}_x^4 + b^2 \mathfrak{V}_y^4 + c^2 \mathfrak{V}_z^4}}, \end{aligned}$$

die  $a, b, c$  und  $d$  zu bestimmen erlauben.

Aus der Form der Gleichungen (58) bis (62) ist es ersichtlich, dass die Resultate unsere Theorie von den Fresnel'schen nichts verschieden sind.

Wir müssen noch bemerken, dass man in den Maxwell'schen Gleichungen nicht  $\Delta(\Psi - \partial \chi / \partial t) = 0$  nehmen kann; ebensowenig darf man gleichzeitig  $\Psi = 0, \chi = 0$  setzen, was Maxwell selbst mit Unrecht gethan hat. Ersetzt man aber in den Gleichungen des englischen Gelehrten  $\Psi - \partial \chi / \partial t$  durch  $q$  und setzt  $\mu = 1$ , so stimmen vollständig die beiden electrischen Theorien miteinander in allen Folgerungen überein.

Reflexion und Brechung.

18. Es sei nun unser unteres Medium des § 8 durch einen Krystall ersetzt; ziehen wir die Axen  $\xi, \eta, \zeta$  in den Richtungen der früheren (§ 8)  $x, y, z$  und nehmen die Ebene  $\xi = 0$  für die Grenzfläche, dieselbe der  $\xi \eta$  für die Einfallsebene, der sich eine geradlinig polarisirte ebene Lichtwelle mit der Geschwindigkeit  $\mathfrak{B} = L / T$  fortpflanzt; den Winkel der Wellennormale mit der positiven  $\xi$ -Axe bezeichnen wir mit  $\psi$ . Es lässt sich leicht beweisen, und zwar genau in derselben Weise, wie das gewöhnlich gethan wird, dass man eine reflectirte ( $\psi_r, \mathfrak{B}$ ) und zwei gebrochene Wellen ( $\psi_1, \mathfrak{B}_1, \psi_2, \mathfrak{B}_2$ ) erhält, deren Normalen alle in der Einfallsebene liegen. Die Schwingungsrichtungen der gebrochenen Strahlen lassen sich mit Hülfe der Gleichungen (59), (60), von der Schwingungsrichtung in der einfallenden Welle unabhängig bestimmen.

Weiter setzen wir dem Früheren ganz analog

$$3) \quad \left\{ \begin{array}{l} U = S \sin \psi \sin \omega e^{i\Theta}, \quad V = -S \cos \psi \sin \omega e^{i\Theta} \\ W = S \cos \omega e^{i\Theta} \\ \Theta = 2\pi \left( \frac{\xi \cos \psi + \eta \sin \psi}{L} - \frac{t}{T} \right), \quad \varphi = 0, \quad \Phi = 0 \end{array} \right.$$

für die einfallende Welle; für die reflectirte wird ebenso

$$4) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_r = S_r \sin \psi_r \sin \omega_r e^{i\Theta_r}, \quad V_r = -S_r \cos \psi_r \sin \omega_r e^{i\Theta_r}, \\ W_r = S_r \cos \omega_r e^{i\Theta_r}, \\ \Theta_r = 2\pi \left( \frac{\xi \cos \psi_r + \eta \sin \psi_r}{L} - \frac{t}{T} \right) \end{array} \right.$$

und für die gebrochenen

$$5) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_1 = S_1 \sin \psi_1 \sin \omega_1 e^{i\Theta_1}, \quad V_1 = -S_1 \cos \psi_1 \sin \omega_1 e^{i\Theta_1} \\ U_2 = S_2 \sin \psi_2 \sin \omega_2 e^{i\Theta_2}, \quad V_2 = -S_2 \cos \psi_2 \sin \omega_2 e^{i\Theta_2} \\ W_1 = S_1 \cos \omega_1 e^{i\Theta_1}, \\ W_2 = S_2 \cos \omega_2 e^{i\Theta_2}, \\ \Theta_1 = 2\pi \left( \frac{\xi \cos \psi_1 + \eta \sin \psi_1}{L_1} - \frac{t}{T} \right), \quad \Theta_2 = 2\pi \left( \frac{\xi \cos \psi_2 + \eta \sin \psi_2}{L_2} - \frac{t}{T} \right). \end{array} \right.$$

Dann ist die Bedingung (22) für alle Wellen identisch erfüllt, ferner nehmen wir noch an

$$(66) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_r = i \mathfrak{D}_r e^{i \Psi_r}, \quad \Phi_1 = i \mathfrak{D}_1 e^{i \Psi_1}, \quad \Phi_2 = i \mathfrak{D}_2 e^{i \Psi_2}, \\ \Psi_r = 2\pi \left( \frac{\xi \cos \theta_r + \eta \sin \theta_r}{l_r} - \frac{t}{T} \right), \quad \Psi_1 = 2\pi \left( \frac{\xi \cos \theta_1 + \eta \sin \theta_1}{l_1} - \frac{t}{T} \right) \\ \Psi_2 = 2\pi \left( \frac{\xi \cos \theta_2 + \eta \sin \theta_2}{l_2} - \frac{t}{T} \right) \\ l_r = l_1 = l_2 = \infty. \end{array} \right.$$

Aus den Grenzbedingungen folgt ohne weiteres

$$\frac{\sin \psi}{L} = \frac{\sin \psi_r}{L} = \frac{\sin \psi_1}{L_1} = \frac{\sin \psi_2}{L_2} = \frac{\sin \theta_r}{l_r} = \frac{\sin \theta_1}{l_1} = \frac{\sin \theta_2}{l_2},$$

d. h.

$$\psi_r = \pi - \psi, \quad \frac{\cos \theta_r}{l_r} = i \frac{\sin \psi}{L}, \quad \frac{\cos \theta_1}{l_1} = \frac{\cos \theta_2}{l_2} = -i \frac{\sin \psi}{L}.$$

Somit sind uns nur noch  $S_r, S_1, S_2, \omega_r, \mathfrak{D}_r, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$  unbekannt; zur Bestimmung derselben haben wir die 13 Continuitätsbedingungen für  $U, V, W$ , ihre ersten Derivierten und  $\varphi$  zu benutzen; dabei ist  $\Phi$  offenbar an der Grenze unstetig.

19. Nun überzeugen wir uns leicht ganz dem Früheren analog, dass aus genannten 13 Gleichungen nur sechs untereinander verschieden sind, es ist nämlich für  $\xi = 0$

$$(67) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{U} + \bar{U}_r = \bar{U}_1 + \bar{U}_2; \quad \bar{V} + \bar{V}_r = \bar{V}_1 + \bar{V}_2; \quad \bar{W} + \bar{W}_r = \bar{W}_1 + \bar{W}_2; \\ \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial x} = \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}_2}{\partial x}; \quad \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{W}_r}{\partial x} = \frac{\partial \bar{W}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{W}_2}{\partial x} \\ q_r = q_1 + q_2. \end{array} \right.$$

Sind  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  die Grössen  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$  für die beiden gebrochenen Strahlen, auf die  $x, y, z$ -Axen bezogen,  $d_1$  und  $d_2$  die Winkel der beiden Wellennormalen mit den entsprechenden Strahlenrichtungen, so finden wir infolge der Gleichungen (55), (56) und (62)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} d_1 &= - \frac{a_1 \alpha_1 \mathfrak{S}_x^2 + b_1 \beta_1 \mathfrak{S}_y^2 + c_1 \gamma_1 \mathfrak{S}_z^2}{\mathfrak{S}_1^2}; \\ \operatorname{tg} d_2 &= - \frac{a_2 \alpha_2 \mathfrak{S}_x^2 + b_2 \beta_2 \mathfrak{S}_y^2 + c_2 \gamma_2 \mathfrak{S}_z^2}{\mathfrak{S}_2^2} \end{aligned}$$



$$\varphi_1'' = -\frac{1}{\mathfrak{B}_1} \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} (a_1 \alpha_1 \mathfrak{B}_x^2 + b_1 \beta_1 \mathfrak{B}_y^2 + c_1 \gamma_1 \mathfrak{B}_z^2) S_1$$

$$\varphi_2'' = -\frac{1}{\mathfrak{B}_2} \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}_0^2} (a_2 \alpha_2 \mathfrak{B}_x^2 + b_2 \beta_2 \mathfrak{B}_y^2 + c_2 \gamma_2 \mathfrak{B}_z^2) S_2$$

der

$$\varphi_1'' = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}_0^2} \operatorname{tg} d_1 S_1; \quad \varphi_2'' = \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_0^2} \operatorname{tg} d_2 S_2.$$

Weiter ist nach (52)

$$\varphi_r = -\frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{\partial \Phi_r}{\partial t} = -\frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{2\pi}{T} \mathfrak{D}_r e^{i\Psi_r}, \quad \varphi_1' = -\frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{2\pi}{T} \mathfrak{D}_1 e^{i\Psi_1},$$

$$\varphi_2' = -\frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{2\pi}{T} \mathfrak{D}_2 e^{i\Psi_2}.$$

in  $\varphi_r$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  von der Coordinatenwahl unabhängig sind.

Nun lassen sich die Grenzbedingungen in folgender Form schreiben:

$$\begin{cases} (S \sin \omega + S_r \sin \omega_r) \sin \psi = S_1 \sin \psi_1 \sin \omega_1 + S_2 \sin \psi_2 \sin \omega_2 \\ \quad + 2\pi i \frac{\sin \psi}{L} (\mathfrak{D}_r + \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2) \\ (S \sin \omega - S_r \sin \omega_r) \cos \psi = S_1 \cos \psi_1 \sin \omega_1 + S_2 \cos \psi_2 \cos \omega_2 \\ \quad - 2\pi \frac{\sin \psi}{L} (\mathfrak{D}_r - \mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2) \\ S \cos \omega + S_r \cos \omega_r = S_1 \cos \omega_1 + S_2 \cos \omega_2 \\ (S \sin \omega + S_r \sin \omega_r) \frac{\cos^2 \psi}{L} = S_1 \sin \omega_1 \frac{\cos^2 \psi_1}{L_1} + S_2 \sin \omega_2 \frac{\cos^2 \psi_2}{L_2} \\ \quad - 2\pi i \frac{\sin^2 \psi}{L^2} (\mathfrak{D}_r + \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2) \\ (S \cos \omega - S_r \cos \omega_r) \frac{\cos \psi}{L} = S_1 \cos \omega_1 \frac{\cos \psi_1}{L_1} + S_2 \sin \omega_2 \frac{\cos \psi_2}{L_2} \\ S_1 \sin \psi_1 \operatorname{tg} d_1 + S_2 \sin \psi_2 \operatorname{tg} d_2 = -2\pi \frac{\sin \psi}{L} (\mathfrak{D}_r - \mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2), \end{cases} \quad (8)$$

daraus wir leicht schliessen, dass wir eigentlich nur mit sechs unbekannten zu thun haben.

Die Elimination von  $\mathfrak{D}_r$  und  $\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2$  ergibt

$$(69) \left\{ \begin{aligned} S \sin \omega + S_r \sin \omega_r &= S_1 \sin \omega_1 \frac{\sin \psi}{\sin \psi_1} + S_2 \sin \omega_2 \frac{\sin \psi}{\sin \psi_2} \\ S \sin \omega - S_r \sin \omega_r &= S_1 \frac{\sin \omega_1 \cos \psi_1 + \sin \psi_1 \operatorname{tg} d_1}{\cos \psi} \\ &\quad + S_2 \frac{\sin \omega_2 \cos \psi_2 + \sin \psi_2 \operatorname{tg} d_2}{\cos \psi} \\ S \cos \omega + S_r \cos \omega_r &= S_1 \cos \omega_1 + S_2 \cos \omega_2 \\ S \cos \omega - S_r \cos \omega_r &= S_1 \cos \omega_1 \frac{\cos \psi_1 \sin \psi}{\cos \psi \sin \psi_1} + S_2 \cos \omega_2 \frac{\cos \psi_2 \sin \psi}{\cos \psi \sin \psi_2} \end{aligned} \right.$$

und diese Gleichungen gestatten  $S_r$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $\omega_r$  zu berechnen

20. Multipliciren wir zunächst die ersten zwei Gleichungen untereinander, dann die letzten zwei, und addiren die beide Producte, so folgt

$$(70) \left\{ \begin{aligned} (S^2 - S_r^2) \cos \psi &= S_1^2 \frac{\sin \psi}{\sin \psi_1} (\cos \psi_1 + \sin \psi_1 \sin \omega_1 \operatorname{tg} d_1) \\ &\quad + S_2^2 \frac{\sin \psi}{\sin \psi_2} (\cos \psi_2 + \sin \psi_2 \sin \omega_2 \operatorname{tg} d_2) + \dots \end{aligned} \right.$$

$$(71) \left\{ \begin{aligned} A &= S_1 S_2 \left\{ \frac{\sin \psi}{\sin \psi_1} (\sin \omega_1 \sin \omega_2 \cos \psi_2 + \sin \omega_1 \sin \psi_2 \operatorname{tg} d_2 \right. \\ &\quad \left. + \cos \omega_1 \cos \omega_2 \cos \psi_1) + \frac{\sin \psi}{\sin \psi_2} (\sin \omega_1 \sin \omega_2 \cos \psi_1 \right. \\ &\quad \left. + \sin \omega_2 \sin \psi_1 \operatorname{tg} d_1 + \cos \omega_1 \cos \omega_2 \cos \psi_2) \right\} \end{aligned} \right.$$

oder, wenn man bemerkt, dass

$$\begin{aligned} \sin 2 \psi_1 + \sin 2 \psi_2 &= 2 \sin (\psi_1 + \psi_2) \cos (\psi_1 - \psi_2) \\ \cos \omega_1 \cos \omega_2 + \sin \omega_1 \sin \omega_2 \cos (\psi_2 - \psi_1) &= \cos \vartheta, \end{aligned}$$

worin  $\vartheta$  den Winkel zwischen beiden gebrochenen Schwingungen bedeutet, so bekommen wir aus (71)

$$A = S_1 S_2 \frac{\sin \psi}{\sin \psi_1 \sin \psi_2} \{ \sin (\psi_1 + \psi_2) \cos \vartheta + \sin \omega_1 \sin^2 \psi_2 \operatorname{tg} d_2 + \sin \omega_2 \sin^2 \psi_1 \operatorname{tg} d_1 \}.$$

Wir werden bald sehen, dass der Satz der Erhaltung der Energie zur Beziehung führt

$$(72) \left\{ \begin{aligned} (S^2 - S_r^2) \cos \psi &= S_1^2 \frac{\sin \psi}{\sin \psi_1} (\cos \psi_1 + \sin \psi_1 \sin \omega_1 \operatorname{tg} d_1) \\ &\quad + S_2^2 \frac{\sin \psi}{\sin \psi_2} (\cos \psi_2 + \sin \psi_2 \sin \omega_2 \operatorname{tg} d_2) \end{aligned} \right.$$

so muss  $A = 0$  sein. Diese Bedingung wird identisch erfüllt, wenn einer der gebrochenen Strahlen verschwindet; übrigenfalls ist

$$3) \left\{ \frac{\sin \psi}{\sin \psi_1 \sin \psi_2} \{ \sin (\psi_1 + \psi_2) \cos \vartheta + \sin \omega_1 \sin^2 \psi_2 \operatorname{tg} d_2 + \sin \omega_2 \sin^2 \psi_1 \operatorname{tg} d_1 \} = 0. \right.$$

Bei normaler Incidenz ist  $\psi = \psi_1 = \psi_2 = \pi$ ; dann folgt  $\vartheta = 0$ , also stehen die beiden gebrochenen Schwingungen senkrecht zu einander; ist z. B.  $d_1 = 0$  (bei beliebiger Incidenz), folgt

$$\cos \vartheta = - \sin \omega_1 \frac{\sin^2 \psi_2 \operatorname{tg} d_2}{\sin (\psi_1 + \psi_2)}$$

und beträgt wieder  $\vartheta = \pi/2$ , wenn  $\omega_1 = 0$  ist etc. Alle diese Folgerungen sind bekanntlich durch directe Versuchsergebnisse bestätigt.

21. Um nun die Gleichungen (69) mit den Beobachtungen zu vergleichen, wenden wir dieselben auf einen einaxigen Krystall, der normal zur optischen Axe (es sei die  $x$ -Axe) abgeschnitten ist; an; dann fallen die Richtungen  $\xi, \eta, \zeta$  mit  $x, y, z$  zusammen und es ist leicht zu beweisen, dass

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \frac{\pi}{2}, \quad d_1 = 0$$

in muss.

Dann berechnen wir aus (69)

$$S_r \cos \omega_r = S \cos \omega \frac{\sin (\psi_1 - \psi)}{\sin (\psi_1 + \psi)}$$

$$S_1 = S \cos \omega \frac{4 \cos \psi \cos \psi_1}{\sin (\psi_1 + \psi)}$$

$$S_2 = S \left( \sin \omega + \cos \omega \operatorname{tg} \omega_r \frac{\sin (\psi_1 - \psi)}{\sin (\psi_1 + \psi)} \right) \frac{\sin \psi_2}{\sin \psi}$$

$$\sin \omega - \cos \omega \operatorname{tg} \omega_r \frac{\sin (\psi_1 - \psi)}{\sin (\psi_1 + \psi)} \cos \psi = \left( \sin \omega + \cos \omega \operatorname{tg} \omega_r \frac{\sin (\psi_1 - \psi)}{\sin (\psi_1 + \psi)} \right) \times (\cos \psi_2 - \sin \psi_2 \operatorname{tg} d_2) \frac{\sin \psi}{\sin \psi_2}.$$

Bei  $\omega = 0$  folgt  $\omega_r = 0$ ,  $S_2 = 0$ ; der Krystall verhält sich wie ein isotroper Körper; bei  $\omega = \pi/2$  haben wir auch  $\omega_r = \pi/2$ ,  $S_2 = 0$ . Dann ist nach (69)

$$S + S_r = S_2 \frac{\sin \psi}{\sin \psi_2}, \quad S - S_r = S_2 (\cos \psi_2 - \sin \psi_2 \operatorname{tg} d_2)$$

und

$$S_r = S \frac{\sin 2 \psi - O \sin 2 \psi_2}{\sin 2 \psi + O \sin 2 \psi_2}$$

$$S_2 = S \frac{4 \cos \psi \sin \psi_2}{\sin 2 \psi + O \sin 2 \psi_2}$$

$$O = 1 - \operatorname{tg} \psi_2 \operatorname{tg} d_2.$$

Auch dies alles steht mit der Beobachtung im vollkommenen Einklang.

Es wäre ferner leicht sich zu überzeugen, dass alle anderen Grenzbedingungen auch erfüllt sind; man muss wieder  $L, M, N$  aus zwei Theilen zusammengesetzt denken. Die  $L_r'', \dots L_1'', \dots L_2''$  werden durch  $\lambda_r \dots, \lambda_1 \dots, \lambda_2 \dots$ , d. h. durch  $U_r \dots, U_1 \dots, U_2 \dots$  eindeutig gegeben; zur Berechnung von  $L_r', \dots, L_1' + L_2', \dots$ , also im ganzen von sechs Unbekannten, werden wir wieder sechs Gleichungen an der Grenze haben.

22. Nun wenden wir uns zur Untersuchung der Frage, wie weit bei der Reflexion an der Grenze von zwei durchsichtigen Medien der Satz der Erhaltung der Energie erfüllt ist.

Denken wir uns ein Volumenelement  $d\Omega = dx dy dz$ , auf dessen Grenzflächen  $dy dz, dx dz, dx dy$  sich die Electricitätsmengen  $\pm x dy dz, \pm y dx dz, \pm z dx dy$  befinden, so stellt dieses Parallelepipeton die drei Condensatoren mit den electromotorischen Kräften, resp.  $P dx, Q dy, R dz$  dar. Die electrostatische Energie dieser Condensatoren beträgt bez.

$$\frac{1}{2} P x d\Omega, \quad \frac{1}{2} Q y d\Omega, \quad \frac{1}{2} R z d\Omega,$$

sodass die ganze potentielle Energie des Mediums wird

$$E_s = \frac{1}{2} \int (P x + Q y + R z) d\Omega,$$

oder anders geschrieben

$$E_s = \frac{1}{8\pi} \int (D_x P^2 + D_y Q^2 + D_z R^2) d\Omega.$$

Nun ist infolge der Gleichungen (50) und (54)

$$P = -\frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{\mathfrak{B}_x^2}{\mathfrak{B}^2} \frac{\partial U}{\partial t}, \quad Q = -\frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{\mathfrak{B}_y^2}{\mathfrak{B}^2} \frac{\partial V}{\partial t}, \quad R = -\frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{\mathfrak{B}_z^2}{\mathfrak{B}^2} \frac{\partial W}{\partial t},$$

sodass wir nach (52) bekommen

$$(74) \quad E_s = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \int d\Omega \left\{ \mathfrak{B}_x^2 \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \mathfrak{B}_y^2 \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \mathfrak{B}_z^2 \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right\}.$$

Die magnetische (kinetische) Energie des Mediums ist bekanntlich bei  $\vartheta = \vartheta_0$

$$E_m = \frac{1}{8\pi} \int (\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2) d\Omega$$

oder nach (18)

$$(75) E_m = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \int d\Omega \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right\}.$$

Setzt man in die Gleichungen (74) und (75) statt  $U, V, W$  ihre Ausdrücke durch  $S$  (nach (56)), zieht dabei die Gleichungen (59) in Betracht und bemerkt, dass

$$(a\beta - \alpha b)^2 + (a\gamma - \alpha c)^2 + (b\gamma - \beta c)^2 = 1,$$

so folgt

$$E_s = E_m = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \int \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 d\Omega,$$

und die Gesamtenergie des Mediums wird

$$(76) E = E_s + E_m = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \int \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 d\Omega.$$

23. Seien nun ferner  $\Omega, \Omega_r, \Omega_1, \Omega_2$  die entsprechenden Raumtheile, an den Stellen genommen, wo die Bewegung in der einfallenden, reflectirten und den beiden gebrochenen Wellen vor sich geht; dann ist

$$(77) \left\{ \begin{array}{l} E = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \int d\Omega \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 \\ E_r = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \int d\Omega_r \left( \frac{\partial S_r}{\partial t} \right)^2 \\ E_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{1}{\mathfrak{B}_1^2} \int d\Omega_1 \left( \frac{\partial S_1}{\partial t} \right)^2 \\ E_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\mathfrak{B}_0^2} \frac{1}{\mathfrak{B}_2^2} \int d\Omega_2 \left( \frac{\partial S_2}{\partial t} \right)^2. \end{array} \right.$$

Der Satz der Energieerhaltung ist ausgesprochen durch die Beziehung:

$$(78) E = E_r + E_1 + E_2,$$

worin  $\Omega, \Omega_r, \Omega_1$  und  $\Omega_2$  in folgender Weise bestimmt werden sollen: man begrenzt die einfallende Welle durch eine Säule, deren Axe der Wellennormale parallel läuft; durch diese Säule wird aus der Grenzebene eine Fläche  $\sigma_0$  ausgeschnitten und eine neue Bewegung in drei neuen Säulen hervorgerufen, die

aus der  $\xi\eta$ -Ebene dieselbe Fläche  $\sigma_0$  ausschneiden. Bei der „reflectirten“ Säule ist die Axe der reflectirten Wellennormale bei den „gebrochenen“ sind dieselben den entsprechenden Strahlen parallel. Sind  $\sigma, \sigma_r, \sigma_1, \sigma_2$  die den Wellenebenen parallele Schnittflächen von allen vier Säulen, so ist offenbar

$$(79) \quad \begin{cases} \sigma = -\sigma_0 \cos \psi \\ \sigma_r = -\sigma_0 \cos \psi \\ \sigma_1 = -\sigma_0 (a_1 \pi + b_1 \rho + c_1 \tau) \\ \sigma_2 = -\sigma_0 (a_2 \pi + b_2 \rho + c_2 \tau), \end{cases}$$

worin  $\pi, \rho, \tau$  die Cosinus der Winkel  $\xi x, \xi y, \xi z$  bedeuten. Wenn die Bewegung in der einfallenden Welle während einer Schwingungsperiode  $T$  sich zwischen zwei der Wellenebenen parallelen Schnittflächen  $AB$  und  $A'B'$  der ersten Säule fortpflanzt, so wird in den drei anderen Säulen die Bewegung sich in derselben Zeit zwischen den entsprechenden Wellenebenen parallelen Schnitten  $A_r B_r$  und  $A'_r B'_r$ ,  $A_1 B_1$  und  $A'_1 B'_1$  resp.  $A_2 B_2$  und  $A'_2 B'_2$  fortpflanzen. Die gegenseitigen Abstände der Schnitte betragen offenbar  $L, L, L_1$  und  $L_2$ .

Die Erhaltung der Energie (78) fordert, dass die Energie des Säulenvolumens  $\Omega = AB A'B'$  der Summe der Energie in den entsprechenden Volumina  $\Omega_r = A_r B_r A'_r B'_r$ ,  $\Omega_1 = A_1 B_1 A'_1 B'_1$  und  $\Omega_2 = A_2 B_2 A'_2 B'_2$  gleich sei.

24. Nehmen wir für  $S$  den gewöhnlichen reellen Ausdruck

$$S = S \cos \Theta, \quad \Theta = 2\pi \left( \frac{\xi \cos \psi + \eta \sin \psi}{L} - \frac{t}{T} \right),$$

so ist ebenso zu setzen

$$S_r = S_r \cos \Theta_r, \quad \Theta_r = 2\pi \left( \frac{\xi_r \cos \psi + \eta_r \sin \psi}{L} - \frac{t_r}{T} \right)$$

$$S_1 = S_1 \cos \Theta_1, \quad \Theta_1 = 2\pi \left( \frac{\xi_1 \cos \psi_1 + \eta_1 \sin \psi_1}{L_1} - \frac{t_1}{T} \right)$$

$$S_2 = S_2 \cos \Theta_2, \quad \Theta_2 = 2\pi \left( \frac{\xi_2 \cos \psi_2 + \eta_2 \sin \psi_2}{L_2} - \frac{t_2}{T} \right)$$

$$d\Omega = d\xi d\eta d\zeta, \quad d\Omega_r = d\xi_r d\eta_r d\zeta_r, \quad d\Omega_1 = d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1,$$

$$d\Omega_2 = d\xi_2 d\eta_2 d\zeta_2,$$

und der Satz der Energie (77), (78) lautet

1) Vgl. O. Tumlirz, l. c.

$$30) \int \frac{S^2}{L^2} \sin^2 \Theta d\Omega = \frac{S_r^2}{L^2} \int \sin^2 \Theta_r d\Omega_r + \frac{S_1^2}{L_1^2} \int \sin^2 \Theta_1 d\Omega_1 \\ + \frac{S_2^2}{L_2^2} \int \sin^2 \Theta_2 d\Omega_2.$$

bezeichnen ferner  $\delta, \delta_r, \delta_1, \delta_2$  die Abstände der Flächen  $AB, A_r B_r, A_1 B_1, A_2 B_2$  von dem Coordinatenursprung, den wir in den Schnittpunkt von allen Säulenaxen legen wollen, und sind  $e, e_r, e_1, e_2$  die Abstände von  $AB, A_r B_r, A_1 B_1, A_2 B_2$  von ihnen parallelen Säulenschnitten in Punkten  $\xi \eta \zeta, \xi_r \eta_r \zeta_r, \xi_1 \eta_1 \zeta_1$  und  $\xi_2 \eta_2 \zeta_2$ , so folgt

$$\Omega = \sigma de, d\Omega_r = \sigma_r de_r, d\Omega_1 = \frac{\sigma_1}{\cos d_1} de_1, d\Omega_2 = \frac{\sigma_2}{\cos d_2} de_2$$

$$\cos \psi + \eta \sin \psi = e - \delta, -\xi_r \cos \psi + \eta \sin \psi = e + \delta_r,$$

$$\xi_1 \cos \psi_1 + \eta_1 \sin \psi_1 = e_1 - \delta_1, \xi_2 \cos \psi_2 + \eta_2 \sin \psi_2 = e_2 - \delta_2$$

und (80) geht über in

$$\frac{S^2}{L^2} \sigma \int_0^L \sin^2 \Theta de = \frac{S_r^2}{L^2} \sigma_r \int_0^L \sin^2 \Theta_r de_r + \frac{S_1^2}{L_1^2} \sigma_1 \int_0^{L_1} \sin^2 \Theta_1 de_1 \\ + \frac{S_2^2}{L_2^2} \sigma_2 \int_0^{L_2} \sin^2 \Theta_2 de_2.$$

Nach der Integration bekommen wir

$$(S^2 - S_r^2) \cos \psi = S_1^2 \frac{\sin \psi}{\sin \psi_1} \frac{a_1 \pi + b_1 \varphi + c_1 \tau}{\cos d_1} + S_2^2 \frac{\sin \psi}{\sin \psi_2} \frac{a_2 \pi + b_2 \varphi + c_2 \tau}{\cos d_2};$$

wenn man bemerkt, dass

$$a_1 \pi + b_1 \varphi + c_1 \tau = \cos \psi_1 \cos d_1 + \sin \psi_1 \sin d_1 \sin \omega_1$$

$$a_2 \pi + b_2 \varphi + c_2 \tau = \cos \psi_2 \cos d_2 + \sin \psi_2 \sin d_2 \sin \omega_2,$$

lässt sich die abgeleitete Gleichung auch schreiben

$$(S^2 - S_r^2) \cos \psi = S_1^2 \frac{\sin \psi}{\sin \psi_1} (\cos \psi_1 + \sin \psi_1 \operatorname{tg} d_1 \sin \omega_1) \\ + S_2^2 \frac{\sin \psi}{\sin \psi_2} (\cos \psi_2 + \sin \psi_2 \operatorname{tg} d_2 \sin \omega_2).$$

Wie schon oben gesagt, ist diese Beziehung mit (72) identisch.

Es stellt also die Gleichung (72) die bekannte Beziehung zwischen den Intensitäten der vier Strahlen, an der Grenze eines isotropen durchsichtigen Körpers mit einem durchsichtigen

Krystalle. Sind die beiden Medien isotrop, so ist  $S_2 = 0$ ,  $d_1 =$  und die Gleichung (72) geht in die Fresnel'sche über

$$(81) \quad S^2 = S_r^2 + S_1^2 \frac{\sin \psi \cos \psi_1}{\sin \psi_1 \cos \psi},$$

welcher durch die früher gefundenen Werthe von  $S_r$  und (43) identisch Genüge geleistet wird.

25. Aus dem Gesagten geht nun hervor, dass die electrische Lichttheorie alle optischen Erscheinungen vorwurfsfrei erklärt, die sich in isotropen Medien oder durchsichtigen Krystallen beobachten lassen. Wir stiessen bei unserer Untersuchung auf keine Schwierigkeit, zu deren Beseitigung irgend eine unmögliche oder unwahrscheinliche Annahme erforderlich wäre. Freilich haben wir  $\epsilon_0 = \infty$  und  $\vartheta = \vartheta_0$  gesetzt; solche abtheils nothwendige Vereinfachung weder unwahrscheinlich ist noch den Beobachtungen widerspricht.

Die Identität der Endresultate der v. Helmholtz'schen Electrodynamik und derselben von Maxwell gibt uns vielleicht noch einen Beweis für die electrische Natur des Lichts in die Hand. Nur eins von unseren Ergebnissen scheint uns gewissermaassen bedauerlich: die electrostatische Kraft pflanzt sich in den isotropen Körpern mit einer unendlichen Geschwindigkeit fort, indem die Oberflächenwellen in der mechanischen Lichttheorie nach Thomson<sup>1)</sup> eine äusserst kleine Geschwindigkeit besitzen sollen. Es schwindet uns daher die Hoffnung, die electrische Lichttheorie mit der Mechanik eines homogenen elastischen Körpers zu verbinden.

Die mechanischen Kräfte, durch welche sich die electrischen Vorgänge äussern, sind in einem homogenen elastischen Körper unmöglich.<sup>2)</sup> Möchte man nicht denken, dass der Wirbelstrom auch in der Optik eine ebenso aussichtsvolle Zukunft, wie in den anderen Gebieten der Physik vorbereitet sei?

Kasan, im Juli 1892.

1) Sir W. Thomson, Phil. Mag. (5), 26. p. 414. 1888.

2) Maxwell, Electricity and Magnetism. Second Edition. 2. p. 253 I. art. 108.





unter Beobachtung aller erforderlichen Cautelen eine für praktische Zwecke im allgemeinen ausreichende Genauigkeit zu erreichen gestattet. Anders steht die Sache, wenn es sich darum handelt, aus den so gewonnenen Zahlen weitergehende theoretische Schlussfolgerungen zu ziehen, zu welchem Zweck ja ausgesprochenermassen die weitaus grösste Anzahl von Bestimmungen der Leitungsfähigkeit der verschiedenen Electrolyte unternommen worden sind. Hier muss vor allen Dingen die angewandte Methode in ihren theoretischen Grundlagen völlig gesichert sein, schon damit ein Urtheil darüber ermöglicht wird inwieweit sie auch bei solchen Bestimmungen Vertrauen verdient, welche Stützpunkte für gewisse neue theoretische Anschauungen abgeben sollen. Dass in dieser Beziehung auch für die Kohlrausch'sche Methode noch manches zu thun bleibt, dürfte nicht zweifelhaft sein; insbesondere harrt der genaueren theoretischen Erforschung die Frage, unter welchen Umständen das Brückentelephon wirklich zum Schweigen gebracht werden kann<sup>1)</sup>; bekanntlich gelingt es meistens nur ein mehr oder weniger deutliches Minimum des Tones zu erzielen; gewöhnlich erklärt man das Nichtverschwinden des Tones als Wirkung der Polarisation, es könnte zuweilen aber auch als Folge eines von der Stromstärke abhängigen Uebergangswiderstandes aufgefasst werden. Es sollte hiermit nur betont werden, dass die Frage des Uebergangswiderstandes auch für die Methode von Kohlrausch nicht ohne jede Bedeutung ist. Dass die Existenz oder Nichtexistenz eines eigentlichen Uebergangswiderstandes endlich für unsere Vorstellungen über das Wesen der Electricitätsleitung überhaupt von Wichtigkeit ist, dürfte von selbst einleuchten.

Die älteren Beobachtungen hatten bekanntlich zu dem Resultat geführt, dass wenn ein eigenthümlicher Uebergangswiderstand existirt, er jedenfalls nicht constant, sondern von der Stromstärke abhängig ist, und zwar mit wachsender Stromstärke abnimmt. Hiernach könnte es zunächst zweifelhaft erscheinen, ob man überhaupt in diesem Falle von einem Widerstand reden kann, da für den Begriff des Widerstandes gerade

---

1) Einige Ergebnisse in dieser Beziehung geben Bouty und Foursereau, *Journal de Phys.* p. 419—425. 1885.







für drei verschiedene bekannte Widerstände  $R$  die zugehörigen logarithmischen Decremente zu bestimmen, um  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $g$  zu erhalten. Zwei dieser Widerstände kann man gleich Null und  $\infty$  nehmen, d. h. die Dämpfung bei offenem mit in sich geschlossenem Multiplicator bestimmen, ausserdem bestimmt man noch die Dämpfung bei einem dritten bekannten Widerstand  $R$ . (Man kann also auch die bei offenem Kreis stattfindende Dämpfung, die wir kurz als Luftdämpfung bezeichnen wollen, wenn sie auch nicht allein von der dämpfenden Wirkung des Luftwiderstandes herrührt, indirect durch drei Beobachtungen bei geschlossenem Stromkreis bestimmen). Zur Controlle kann man natürlich eine Anzahl überzähliger Beobachtungen vornehmen; erforderlich wird dies in allen den Fällen, wo die äusseren Bedingungen, unter denen man arbeitet, die sonst bei Schwingungsbeobachtungen erreichbare Genauigkeit nicht innezuhalten gestatten, wenn z. B. der Beobachtungsraum häufigeren, die Regelmässigkeit der Schwingungen beeinträchtigenden Erschütterungen ausgesetzt ist, man erhält dadurch ein Urtheil über die im gegebenen Fall erreichbare Genauigkeit der Messungen und eine Basis für die Beurtheilung der Resultate. Sind  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $g$  bekannt, so kann man jeden andern Widerstand  $R$  durch eine Dämpfungsbeobachtung in der Einheit, durch welche  $g$  ausgedrückt ist, ermitteln. Ist

$$A_0 = \alpha + \frac{\beta}{g + R},$$

so ist

$$\Delta A_0 = - \frac{\beta}{(g + R)^2} \Delta R,$$

woraus hervorgeht, dass die Anwendbarkeit der Methode sich auf Widerstände von mässiger Grösse beschränkt. Bei grösseren Widerständen kann man sich dadurch helfen, dass man, wenn man den ungefähren Betrag des zu messenden Widerstandes kennt, die Dämpfung für einige in passenden Abständen aufeinander folgende Widerstände derselben Grössenordnung beobachtet und daraus durch Interpolation den gesuchten Widerstand ermittelt. Natürlich ist auch mit dieser Modification die Anwendbarkeit der Methode nur an ziemlich enge Grenzen gebunden. Auf die Anwendbarkeit der Dämpfung für Vergleichung von Widerständen hat bekanntlich zuerst F. Kohlrausch aufmerksam gemacht.



bekannten Werthes von  $\beta$  die inducirte electromotorische Kraft zu berechnen.

Wir müssen nun noch den etwaigen Einfluss einer Polarisation in Rechnung zu ziehen versuchen. Es fehlen in dieser Hinsicht eigentlich alle experimentellen Daten, weil die Fragen der Polarisation hauptsächlich an verdünnter Schwefelsäure zwischen Platinelectroden untersucht worden, dagegen Zellen der hier betrachteten Art weniger Gegenstand der Untersuchung gewesen sind. Dass Zellen dieser Art durchaus nicht polarisationsfrei sind, wie man wohl gewöhnlich angibt, haben erst vor kurzem die Untersuchungen von Koch und Wüllner erwiesen. Allerdings handelte es sich bei den genannten Physikern um ziemlich beträchtliche electromotorische Kräfte. Bei den schwachen Strömen, um welche es sich hier handelt, können wir wohl der gewöhnlichen Anschauung folgend die Annahme machen, dass die Polarisation der durch die Zelle gegangenen Electricitätsmenge proportional sei; dann werden im Fall eines astatischen Systems die Amplitude  $\varphi$  und die momentane Stromstärke  $i$  durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + C_1 \frac{d \varphi}{dt} + (M_1 - M_2) H \varphi + (M_1 G_1 + M_2 G_2) i = 0,$$

$$i W = (M_1 G_1 + M_2 G_2) \frac{d \varphi}{dt} - c \int_0^t i dt.$$

Durch Elimination von  $i$  ergibt sich für  $\varphi$  die Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$K \frac{d^3 \varphi}{dt^3} + \left[ C_1 + \frac{(M_1 G_1 + M_2 G_2)^2}{W} \right] \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + (M_1 - M_2) H \frac{d \varphi}{dt} + \frac{C}{W} \left\{ K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + C_1 \frac{d \varphi}{dt} + (M_1 - M_2) H \varphi \right\} = 0.$$

Ist  $C/W$  eine kleine Grösse  $\varepsilon$ , so kann man sich bei der Integration der Gleichung auf die erste Potenz von  $\varepsilon$  beschränken. Die Gleichung hat die Form:

$$\varphi^{(3)} + a \varphi^{(2)} + b \varphi' + \varepsilon (\varphi^{(2)} + a \varphi' + b \varphi) + \varepsilon (d - a) \varphi' = 0,$$

wenn wir:

$$\frac{C_1}{K} = d, \quad \frac{C_1}{K} + \frac{(M_1 G_1 + M_2 G_2)^2}{W K} = a, \quad \frac{(M_1 - M_2) H}{K} = b$$

setzen. Es seien  $\varrho_1, \varrho_2$  die beiden Wurzeln der quadratischen



































Versuche mit Silberelectroden in Silbernitratlösung nicht fortgesetzt, weil die erhaltenen Resultate schon völlig hinreichten, um die Analogie des Verhaltens des Silbers mit den übrigen untersuchten Metallen festzustellen und bei Anwendung zu starker Ströme es sich als schwierig erweist, haltbare Silberniederschläge zu erzielen, indem durch Bildung von Silberfäden die Electrode, an welcher der Niederschlag erzeugt wird sich gewissermaassen vorschiebt, sodass das Silber nicht mehr an der eigentlichen Kathode, sondern in der Flüssigkeit selbst an den schon vorhandenen Silberfäden abgeschieden wird und die Silberfäden schliesslich die Flüssigkeit durchwachsen.

Wie schon oben angegeben, wirkt in gleicher Weise wie das Ueberziehen der Electroden mit einer electrolytischen Schicht desselben Metalles das *Amalgamiren* frischer blanker Metallplatten. Es wurden in dieser Beziehung Versuche mit Zinkplatten in Zinksulfatlösung und Kupferplatten in Kupfersulfatlösung angestellt. Die zu den früheren Versuchen benutzten Zinkplatten wurden zunächst möglichst sorgfältig glatt und blank gefeilt und mit Smirgelpapier polirt, darauf in ein Becherglas gebracht und dieses mit Zinksulfatlösung vom specifischen Gewicht 1,102 gefüllt. Der Abstand der Electroden betrug 0,75 cm, ihre Berührungsfläche mit der Flüssigkeit war 2,95 cm hoch, ihre Breite 3,2 cm. Die so gebildete Flüssigkeitszelle ergab beim Einschalten in den Multiplicator das logarithmische Decrement 0,01831; das logarithmische Decrement der Luftdämpfung betrug 0,01493. Am nächsten Tage wurden die Zinkplatten amalgamirt und wieder in das mit derselben Lösung gefüllte Becherglas gebracht. Der Abstand der Electroden war jetzt 1,25 cm; ihre Breite 3,2 cm.; die Höhe der Berührungsfläche mit der Flüssigkeit 2,9 cm. Es ergab sich nach Einschaltung der Zelle das logarithmische Decrement 0,07816, während das logarithmische Decrement der Luftdämpfung 0,01755 betrug. Der daraus berechnete Widerstand der Zelle wird  $4,575 \Omega$ , während der aus den Dimensionen der Flüssigkeitsschicht und dem specifischen Gewicht der Lösung unter Zugrundelegung der in Kohlrausch, Prakt. Physik, für die Temperatur von  $17^{\circ}$  angegebenen Leitungsfähigkeit (die Zimmertemperatur war etwa  $17^{\circ}$ ) berechnete





lässt sich also folgendermaassen zusammenfassen. Gehen du eine sogenannte unpolarisierbare Flüssigkeitszelle die Dämpfströme eines schwingenden Magnets, so entspricht die Dämpfung im allgemeinen nicht dem in der Schliessung befindlichen den metallischen und zersetzbaren Leitern herrührenden Widerstand, sondern es tritt ein scheinbarer Uebergangswiderstand hinzu, welcher seinen Sitz an den Berührungsflächen Electroden mit dem flüssigen Leiter hat. Derselbe hängt von der Beschaffenheit der Electroden. Sind deren Oberflächen blank und glatt polirt, so ist er sehr beträchtlich; durch Ueberziehen der Electroden mit electrolytischen Schichten wird er vermindert, und zwar in dem Maasse, als die Struktur dieser Schichten loser und pulveriger wird; er kann auf diese Weise gänzlich zum Verschwinden gebracht werden. In derselben Weise wirkt das Amalgamiren frisch gefeilter und polirter Metallflächen. Hat man diesen Zustand erreicht, so gehen also auch sehr schwache Ströme durch die Flüssigkeitszelle wie durch einen gewöhnlichen metallischen Widerstand, es lässt sich dann weder Polarisation noch ein Uebergangswiderstand nachzuweisen.

Es ist nun von Interesse, die Grösse der durch den schwingenden Magnet inducirten electromotorischen Kraft wenigstens annähernd zu schätzen. Es kommt hierbei, da die Schwingungsdauer constant ist, auf die Schwingungsamplitude an. Bei den Beobachtungen betrug die Amplitude meistens im Durchschnitt 100 bis 25 Scalentheile nach jeder Seite vom Nullpunktes; die Scala hatte einen unveränderlichen Abstand vom Spiegel; eine Ablenkung von 100 Scalentheilen wurde durch einen Strom von 0,00003576 A. hervorgebracht. In der früher angegebenen Weise wird daraus die electromotorische Kraft, welche einer Schwingung von 100 Scalentheilen nach jeder Seite entspricht, zu 0,0000122 V. berechnet. Die Aichung des Galvanometers wurde, da es nur auf den ungefähren Werth der durch Induction erzeugten electromotorischen Kraft ankam, mit Hülfe von noch wenig gebrauchten (also weit von Entladung entfernten) Accumulatoren bewirkt, deren electromotorische Kraft gleich 1,95 V. angesetzt wurde. Da die allgemeinen Schwingungen bis zu weniger als 25 Scalentheilen nach jeder Seite beobachtet wurden und das logarithmische



gänge in den sogenannten unpolarisirbaren Zellen nicht so einfach sind, wie man gewöhnlich annimmt, was ja auch die kürzlich publicirten Untersuchungen von Koch und Wüllner gezeigt haben. Zu denselben bilden sie gewissermaassen ein Gegenstück insofern, als es sich bei jenen um sehr grosse. bei den vorstehenden Versuchen um sehr kleine electromotorische Kräfte handelt.

Hamburg, Phys. Staatslaboratorium, Mai 1892.



hat das Verständniss der ganzen Theorie lange Zeit sehr erschwert.

Der Grund dafür ist wohl darin zu suchen, dass Maxwell die Absicht hatte, sein electromagnetisches System auf der Grundlage der Newton'schen Mechanik aufzubauen. Aber alle diese Versuche sind als nicht gelungen zu bezeichnen — weil die mechanischen Systeme, durch welche man die electromagnetischen Wirkungen darstellen kann, zu verwickelt ausfallen, oder besondere hypothetische Voraussetzungen erfordern und deshalb den ersten Anforderungen an eine Theorie nicht mehr entsprechen.

Es scheint deshalb dem gegenwärtigen Stande unsere Kenntniss am angemessensten zu sein, wenn wir das Maxwell'sche System als in sich abgeschlossen betrachten, welches ganz analog dem der reinen Mechanik auf möglichst scharf und einfach gefasste Begriffe aufzubauen ist. Die beiden Systeme sind dann untereinander zunächst nur durch den Energiebegriff verbunden, der durch eine Reihe gut gekannter Umwandlungen von dem einen zum andern führt. Eine in sich geschlossene Darstellung des Maxwell'schen Systems ist von Heaviside<sup>1)</sup> und Hertz<sup>2)</sup> gegeben, indem als grundlegende Begriffe die electrischen und magnetischen Kräfte, und als Hilfsbegriffe die entsprechenden Polarisationen eingeführt werden. Aus ihnen lässt sich eine vollständige Darstellung der bisher vollständig gekannten thatsächlichen Vorgänge geben, indem die Differentialgleichungen aus einer gegebenen Vertheilung des Zustandes seine zeitliche Aenderung abzuleiten erlauben.

Obwohl nun die Vollständigkeit der Darstellung nichts zu wünschen übrig lässt, fehlt ihr der unveränderlich bleibende Begriff, welcher es erst der Vorstellung ermöglicht, eine Uebersicht des Gesamtverlaufes zu gewinnen.

Zwar ergeben sich auch aus den Maxwell'schen Gleichungen constant bleibende Grössen, das Quantum wahrer Electricität und wahren Magnetismus nach der Definition von Hertz und die Energie des Feldes, aber sie genügen nicht,

1) Heaviside, Phil. Mag. Febr. 1888.

2) Hertz, Gött. Nachr. 1. März 1890.



$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} dt &= - \int ds (u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz) dt \\ &= \iiint \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dt dx \cdot dy \cdot dz, \end{aligned}$$

wo die Integration über die Oberfläche des geschlossenen Raumes zu erstrecken ist, dessen Element  $ds$  und nach innen gerichtete Normale  $n$  ist.

Die gerichteten Grössen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  haben den Charakter von Strömungen, weil dieselben die Strömungen einer Flüssigkeit darstellen, wenn unter  $M$  die in dem geschlossenen Raume enthaltene Flüssigkeitsmenge verstanden ist.

Durch Festsetzung des Raumes und der Grösse  $\partial M / \partial t$  sind die Grössen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  im allgemeinen Falle nicht eindeutig bestimmt. Denn, physikalisch gesprochen, können ausser den Strömungen, welche die zeitliche Aenderung des Gesamtquantums in dem geschlossenen Raume bedingen, noch Strömungen vorhanden sein, welche dem Inhalte ebensoviel zuführen als von ihm forttragen. Mathematisch gesprochen können wir unter dem Integralzeichen eine stetige Function hinzuaddiren, deren Oberflächenintegral verschwindet, und deren Werth sich auf die Grössen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  vertheilen lässt. Wenn man unter  $M$  den Energiewerth versteht, den man vollständig kennt, wenn das System physikalisch vollständig gegeben ist, so werden sich auch die Grössen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  in diesem Falle eindeutig bestimmen lassen. Bei dem electrischen und magnetischen Quantum fehlt die Controlle, welche man bei dem Energiewerth durch passende Verwandlungen in andere Arbeitsformen anstellen kann, und die Vieldeutigkeit, die darin liegt, dass den electrischen Strömungen, welche die Veränderungen des Quantums darstellen, noch solche überlagert sein können, welche den Vorrath unverändert lassen, muss man sich durch besondere Festsetzungen gehoben denken.

Der Begriff des electrischen und magnetischen Quantums ist für die Darstellung der electromagnetischen Vorgänge lange Zeit grundlegend gewesen. Aber er ist für allgemeine Vorgänge nicht ausreichend, weil er in den Grundgleichungen Maxwell's nicht explicite vorkommt, sondern erst durch mathematische Operationen abgeleitet werden muss. Daher kommt es, dass z. B. im freien Aether, wo sich nach Max-





Bewegung dieses Substrats, welches die ihnen anhaftenden Kraftlinien mit sich fortzieht. Die Kraftlinien selbst sollen, wie in den Darstellungen von Hertz, den Polarisationen überall parallel laufen. Ihre Anzahl an einer Stelle des Raumes ist das Product aus einem senkrecht zu ihrer Richtung liegenden Flächenelement mit der Grösse der dort herrschenden Polarisation, und die Anzahl in einem Flächenelemente dividirt durch dessen Grösse gibt die Dichtigkeit der Kraftlinien an der betreffenden Stelle und misst die Stärke des Feldes.

Die allgemeinen Gleichungen für ein electromagnetisches Feld, dessen Theile bewegt werden, sind unter der Voraussetzung, dass die Kraftlinien fest an den materiellen Theilen haften von Hrn. Hertz <sup>1)</sup> aufgestellt und von Hrn. v. Helmholtz <sup>2)</sup> mit dem Princip der kleinsten Wirkung in Verbindung gebracht.

Sind  $\alpha, \beta, \gamma$  die Geschwindigkeiten, bezogen auf ein festes Coordinatensystem,  $X, Y, Z, L, M, N$  die Componenten der electrischen und magnetischen Kräfte,  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  die der entsprechenden Polarisationen,  $1/A$  die Lichtgeschwindigkeit, so lauten die allgemeinen Gleichungen des Maxwell'schen Systems in isolirenden Medien:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (\beta \mathfrak{L} - \alpha \mathfrak{M}) - \frac{\partial}{\partial x} (\alpha \mathfrak{N} - \gamma \mathfrak{L}) \\ \quad + \alpha \left( \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) \frac{1}{A} \\ \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\gamma \mathfrak{M} - \beta \mathfrak{N}) - \frac{\partial}{\partial x} (\beta \mathfrak{L} - \alpha \mathfrak{M}) \\ \quad + \beta \left( \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \frac{1}{A} \\ \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha \mathfrak{N} - \gamma \mathfrak{L}) - \frac{\partial}{\partial y} (\gamma \mathfrak{M} - \beta \mathfrak{N}) \\ \quad + \gamma \left( \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \frac{1}{A} \end{array} \right.$$

1) Hertz, Wied. Ann. 40. p. 370. 1890.

2) v. Helmholtz, a. a. O.

$$2) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (\beta \mathfrak{X} - \alpha \mathfrak{Y}) - \frac{\partial}{\partial z} (\alpha \mathfrak{Z} - \gamma \mathfrak{X}) \\ & \quad + \alpha \left( \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} \right) = \frac{1}{A} \left( \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} \right) \\ & \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\gamma \mathfrak{Y} - \beta \mathfrak{Z}) - \frac{\partial}{\partial z} (\beta \mathfrak{X} - \alpha \mathfrak{Y}) \\ & \quad + \beta \left( \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} \right) = \frac{1}{A} \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} \right) \\ & \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha \mathfrak{Z} - \gamma \mathfrak{X}) - \frac{\partial}{\partial y} (\gamma \mathfrak{Y} - \beta \mathfrak{Z}) \\ & \quad + \gamma \left( \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} \right) = \frac{1}{A} \left( \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} \right). \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichungen gehen in die für ruhende Medien geltenden über, wenn  $\alpha, \beta, \gamma$  verschwinden. Die dann vorhandenen zeitlichen Aenderungen können als Wirkungen der magnetischen Kraftvertheilung angesehen werden. Die Gleichungen (2) sind von der Voraussetzung abgeleitet, dass <sup>1)</sup>, solange der Einfluss der Bewegung allein sich geltend macht, h. die rechten Seiten der Gleichungen (2) verschwinden,

$$) \quad \frac{d}{dt} (\mathfrak{X} dy dz + \mathfrak{Y} dx dz + \mathfrak{Z} dy dx) = 0,$$

h. die Anzahl der Kraftlinien, welche ein senkrecht zu ihrer Richtung gelegtes Flächenstück durchsetzen, ungeändert bleibt.

Genau dieselben Gleichungen treten in der Hydrodynamik auf, wenn man unter  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$  die Componenten der Drehungsgeschwindigkeiten der elastischen Flüssigkeiten und unter  $\alpha, \beta, \gamma$  die Geschwindigkeiten versteht. Diese hängen dann mit  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$  durch die Gleichungen zusammen

$$1) \quad \left\{ \begin{aligned} 2 \mathfrak{X} &= \frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial y} \\ 2 \mathfrak{Y} &= \frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial z} \\ 2 \mathfrak{Z} &= \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x}. \end{aligned} \right.$$

Die hydrodynamischen Gleichungen lauten nun, wenn noch  $\rho$  die Dichtigkeit,  $V$  die Potentialfunction der äusseren Kräfte,  $p$  den Druck bezeichnen,

1) v. Helmholtz, a. a. O. Gleichung (7).

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \beta \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \alpha}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial \beta}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial x} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \beta}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \beta \frac{\partial \gamma}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial z}.\end{aligned}$$

Durch Elimination von  $V$  und  $p$ , unter der Voraussetzung, dass  $h$  eine Function von  $p$  ist, erhält man die linken Seiten der Gleichungen (2) gleich Null gesetzt. Diese Gleichungen lassen sich auch noch anders deuten. Bezeichnet  $dx dy dz$  das Raumelement, so ist die Gleichung, welche die Constanz der Masse ausspricht

$$\frac{d}{dt} (h dx dy dz) = 0$$

oder

$$\frac{dh}{dt} + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) h = 0.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung lassen sich die gleich Null gesetzten linken Seiten der Gleichungen (2) schreiben

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} = \mathfrak{X} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \mathfrak{Y} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \mathfrak{Z} \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\mathfrak{X}}{h} \frac{dh}{dt}$$

u. s. w.

oder

$$h \left( \frac{d \mathfrak{X}}{dt} \frac{1}{h} - \frac{\mathfrak{X}}{h^2} \frac{dh}{dt} \right) = h \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathfrak{X}}{h} \right) = \mathfrak{X} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \mathfrak{Y} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \mathfrak{Z} \frac{\partial \alpha}{\partial z},$$

ebenso

$$h \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathfrak{Y}}{h} \right) = \mathfrak{X} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \mathfrak{Y} \frac{\partial \beta}{\partial y} + \mathfrak{Z} \frac{\partial \beta}{\partial z}$$

$$h \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathfrak{Z}}{h} \right) = \mathfrak{X} \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \mathfrak{Y} \frac{\partial \gamma}{\partial y} + \mathfrak{Z} \frac{\partial \gamma}{\partial z}.$$

Bezeichnen wir nun die Coordinaten zweier sehr naher Theilchen einer Wirbellinie mit  $x, y, z, x + dx, y + dy, z + dz$ , und mit  $\xi, \eta, \zeta, \xi + d\xi, \eta + d\eta, \zeta + d\zeta$  nach Ablauf von  $dt$  und setzen wir

$$\varepsilon \mathfrak{X} = dx \quad \varepsilon \mathfrak{Y} = dy \quad \varepsilon \mathfrak{Z} = dz,$$

wo  $\varepsilon$  eine unendlich kleine constante Grösse bezeichnet, so haben wir

$$\frac{\varepsilon \mathfrak{X}}{h} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\varepsilon \mathfrak{X}}{h} \right) dt = \frac{1}{h} d\xi$$

$$\frac{\varepsilon \mathfrak{Y}}{h} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\varepsilon \mathfrak{Y}}{h} \right) dt = \frac{1}{h} d\eta$$

$$\frac{\varepsilon \mathfrak{Z}}{h} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\varepsilon \mathfrak{Z}}{h} \right) dt = \frac{1}{h} d\zeta.$$

Sind also  $d\lambda$ ,  $d\mu$ ,  $d\nu$  die Werthe, welche  $\varepsilon \mathfrak{X} / h$ ,  $\varepsilon \mathfrak{Y} / h$ ,  $\varepsilon \mathfrak{Z} / h$  nach Ablauf von  $dt$  haben, so ist

$$d\lambda : d\mu : d\nu = d\xi : d\eta : d\zeta$$

Die Richtung von  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , stimmt also mit der Richtung  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{Y}$ ,  $\mathfrak{Z}$  nach Ablauf von  $dt$  überein.

Es geht also aus diesen Betrachtungen hervor, dass die linken Seiten der Gleichungen (2) die allgemeine Veränderung der Vektoren bezeichnen, welche mit den materiellen Theilen, mit denen sie verbunden sind, dauernd verbunden bleiben, so lange die Vorgänge Stetigkeit bewahren.

Wir wenden uns nun wieder zu der Betrachtung electrodynamischer Systeme. Die dann vorhanden enzeitlichen Aenderungen der  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{Y}$ ,  $\mathfrak{Z}$  sollen nun durch die Bewegung eines unendlich dünnen Substrats dargestellt werden, an dessen Theilen die Kraftlinien haften, und dafür sollen die zeitlichen Aenderungen in Bezug auf das bewegte Medium verschwinden. In Bezug auf das ruhende Medium muss dann die Aenderung nach der Zeit verschwinden, wenn sowohl die zeitlichen Aenderungen als die durch die Bewegung verursachten berücksichtigt werden. Es muss also sein

$$\frac{d}{dt} (\mathfrak{X} dz dy + \mathfrak{Y} dx dz + \mathfrak{Z} dx dy) = 0.$$

Diese Bedingung ergibt die linken Seiten der Gleichungen (2) gleich Null gesetzt.

Die  $\partial \mathfrak{X} / \partial t$ ,  $\partial \mathfrak{Y} / \partial t$ ,  $\partial \mathfrak{Z} / \partial t$  müssen dann die aus den Maxwell'schen Gleichungen für ruhende Körper bestimmten Werthe haben. Wir erhalten also

$$(5) \left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{A} \left( \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial y} \mathfrak{X} + \frac{\partial \gamma}{\partial x} \mathfrak{X} + \\ &\quad + \beta \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \mathfrak{Y} \\ -\frac{1}{A} \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial x} \mathfrak{Y} + \frac{\partial \alpha}{\partial x} \mathfrak{Y} + \\ &\quad + \beta \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \mathfrak{Z} \\ -\frac{1}{A} \left( \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} \mathfrak{Z} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \mathfrak{Z} + \\ &\quad + \beta \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \mathfrak{X} \end{aligned} \right.$$

Man ersieht hieraus, dass es immer Werthe für die Geschwindigkeit  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  geben muss, welche beliebig von der Zeit und Lage der Ebene Veränderungen des ruhenden electrischen Feldes abhängen können. Dieselben sind aber im allgemeinen hierdurch nicht eindeutig bestimmt. Während man sonst die Veränderungen der electrischen Kräfte hervorgerufen durch die magnetische Kraftvertheilung, kann man die electrischen Kräfte und die  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  in einem bestimmten Augenblick gegeben denken; dann folgt aus den Gleichungen (5) eindeutig die zeitliche Aenderung der Kräfte. Diese Darstellung hat den Vorzug, dass man die Kraftlinien nichtänderlich ansehen und diese allein verfolgen kann, ohne die magnetischen Kräfte Rücksicht zu nehmen. Wegen der Einfachheit wegen an, dass wir es bei den Ueberlegungen nur mit isotropen Körpern zu thun haben.

$$V\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} \text{ u. s. w.}$$

### § 3. Die Bewegung der Energie.

Um die Strömungscomponenten der Energiebewegung nach § 1 aufzustellen, müssen wir die zeitliche Aenderung des Energievorrathes eines ruhenden Raumelementes bestimmen. Im allgemeinen Falle bewegter Materie muss sich die Aenderung erstrecken auf die durch die ponderomotorisch geleisteten Arbeitswerthe. Diese sind positiv zu nehmen, wenn die Arbeit gegen die ponderomotorischen Kräfte geleistet wird. Die im Raumelemente  $dx dy dz$  und im Zeitelement  $dt$  durch herbeigeführte Vergrößerung des Energievorrathes nun nach Maxwell und Hertz



Die ersten Glieder der rechten Seite geben die auch bei ruhenden Körpern auftretenden Energieströmungen, während die zweiten Glieder den mit den bewegten Kraftlinien fortfließenden Energiebetrag enthalten.

Wenn nun die Veränderungen des electromagnetischen Feldes ruhender Körper durch eine Bewegung der Kraftlinien dargestellt werden sollen, so geht aus den obigen Betrachtungen hervor, dass im allgemeinen, wenn relative Bewegungen der einzelnen Theile der Kraftlinien vorkommen, der in dieser Weise dargestellte Energievorrath die den ponderomotorischen Kräften entsprechenden Aenderungen erleiden müsste. Es liegt auch jedenfalls kein Grund zu der Annahme vor, dass die thatsächlich in bewegten Körpern beobachtete Bewegung der Kraftlinien physikalisch sich unterscheiden sollte von der Bewegung, welche wir zur Darstellung der Bewegung des ruhenden Feldes voraussetzen. In der That könnten wir aus den Gleichungen (5) im allgemeinen keine den Forderungen des § genügende Form für die Stromcomponenten der Energie ableiten. Es liegt hierin eine Schwierigkeit für die zu untersuchende Darstellung, welche, soweit ich sehe, bei der bisherigen Anwendung übersehen ist. Da wir indessen die Componenten der Energieströmung durch Zerlegung des Oberflächenintegrals eines geschlossenen Raumes definirt haben, wodurch die Anwesenheit verborgener Strömungen nicht entdeckt war, so können wir die Festsetzung treffen, dass an der Oberfläche des Raumes die Componenten der durch die Bewegung der Kraftlinien hervorgerufenen Energieströmung mit der im § 1 definirten überein zu stimmen haben. Wir werden sogleich sehen, dass dies mit Hülfe der zur Verfügung stehenden Grenzbedingungen möglich ist.

Es sollen also an der Oberfläche des Raumes die Geschwindigkeiten der electrischen und magnetischen Kraftlinien gleich sein und den Gleichungen genügen:

$$(8) \quad \begin{cases} \alpha(\mathfrak{X}X + \mathfrak{Y}Y + \mathfrak{Z}Z + \mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N) = -\frac{2}{A}(NY - MZ) \\ \beta(\mathfrak{X}X + \mathfrak{Y}Y + \mathfrak{Z}Z + \mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N) = -\frac{2}{A}(LZ - NX) \\ \gamma(\mathfrak{X}X + \mathfrak{Y}Y + \mathfrak{Z}Z + \mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N) = -\frac{2}{A}(MX - LY) \end{cases}$$





folgt dann, dass diese  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  durch die Gleichungen (5) und die vorgeschriebenen Werthe an der Oberfläche vollständig bestimmt sind.

Dabei ist die Anzahl und Richtung der Kraftlinien an jeder Stelle des Raumes und also auch die Energie die von dem System geforderte, während die Energieströmung im allgemeinen Falle nur in diesem Werthe an der Oberfläche des Raumes den verlangten Betrag hat.

Wenn wir die Gleichungen (5) beziehlich nach  $x$ ,  $y$ ,  $z$  differenziren und addiren, so erhalten wir, wenn wir beachten, dass  $\partial \mathfrak{X} / \partial x + \partial \mathfrak{Y} / \partial y + \partial \mathfrak{Z} / \partial z = 4 \pi e$  die Raumdichtigkeit wahrer Electricität ist,

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} \right) = 4 \pi \frac{\partial e}{\partial t} = - 4 \pi \left( \frac{\partial}{\partial x} (\alpha e) + \frac{\partial}{\partial y} (\beta e) + \frac{\partial}{\partial z} (\gamma e) \right)$$

$$\iiint \frac{\partial e}{\partial t} dx dy dz = - \int ds e (\alpha \cos nx + \beta \cos ny + \gamma \cos nz).$$

Die Dichtigkeitsänderung der wahren Electricität ist hier als Strömungsgleichung gegeben, die Stromcomponenten haben die Grösse  $e\alpha$ ,  $e\beta$ ,  $e\gamma$  und da die Dichtigkeitsänderung in Isolatoren gleich Null ist, so verschwindet das Raumintegral und die durch die Oberfläche gehende Gesamtströmung. Gemäss den Festsetzungen des § 1 nehmen wir dann auch im allgemeinen die Strömungscomponenten gleich Null an. Also müssen überall, wo wahre Electricität zu finden ist, also  $e$  von Null verschieden ist,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  verschwinden. Es stimmt dies mit der Aussage überein, dass wahre Electricität in Isolatoren ihre Lage unverändert beibehält. Dasselbe gilt für wahren Magnetismus.

Wenn wir es mit verschiedenen sich berührenden Medien zu thun haben, so gelten für die Grenzflächen, an denen die Medien sich berühren, wenn die beiden durch den Index 1 und 2 unterschieden werden, die Bedingungen

$$\begin{aligned} X_1 - X_2 &= \cos nx \, 4 \pi \varepsilon \\ Y_1 - Y_2 &= \cos ny \, 4 \pi \varepsilon \\ Z_1 - Z_2 &= \cos nz \, 4 \pi \varepsilon, \end{aligned}$$



Die Geschwindigkeit der Energiebewegung ist

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{2MX}{A(M^2 + X^2)} = \frac{1}{A}.$$

Den richtigen Werth der Energieströmung und die Uebereinstimmung der Geschwindigkeiten erhalten wir, wenn

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0 \text{ also } \gamma = \frac{1}{A}$$

wird.

Es gehört dieser Fall zu denen, wo die relativen Bewegungen der Theile der Kraftlinien verschwinden, also die richtige Energieströmung von selbst gegeben ist.

Wir betrachten nun noch eine Vertheilung der Kraftlinien symmetrisch um die  $z$ -Axe, bei der die magnetischen Kraftlinien Kreise um diese Axe sind, während die electricen ihr parallele Gerade sein mögen. Die Abhängigkeit von der Zeit sei auf den Factor  $e^{nt}$  beschränkt. Die Polarisationen sollen mit den Kräften identisch sein, die Vorgänge also in freiem Aether sich abspielen.

Wir setzen

$$\begin{aligned} \varphi &= e^{nt} \psi(\varrho), \quad \varrho = x^2 + y^2 \\ (10) \quad \left\{ \begin{array}{l} Z = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \right) \quad X = Y = 0 \\ L = A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho \partial t} \frac{y}{\varrho} \quad N = 0 \\ M = A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho \partial t} \frac{x}{\varrho} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke erfüllen die Maxwell'schen Gleichungen für ruhende Körper<sup>1)</sup>, wenn der Gleichung genügt wird

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} A^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \\ m^2 \psi = \frac{d^2 \psi}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{d\psi}{d\varrho} \quad m^2 = A^2 n^2. \end{array} \right.$$

Bezeichnet man mit  $\mathfrak{J}_{m\varrho}$  diejenige Bessel'sche Function, welche dieser Gleichung genügt und im unendlichen verschwindet, für  $\varrho = 0$  dagegen unstetig wird, so wird durch das obige System ein in der  $z$ -Axe erregtes oder dort verzehrtes

1) Vgl. Hertz, Wied. Ann. 36. p. 1. 1889.

electromagnetisches Feld dargestellt. Wir bezeichnen noch  $d\mathfrak{J}/d\rho$  mit  $\mathfrak{J}'$  und betrachten zunächst die Energieströmung; diese geht in der Richtung  $\rho$  vor sich und beträgt

$$u \frac{x}{\rho} + v \frac{y}{\rho} = \frac{1}{4\pi} e^{2nt} m^2 n \mathfrak{J} \mathfrak{J}',$$

während die Dichtigkeit der Energie den Werth hat

$$r = \frac{1}{8\pi} e^{2nt} m^2 (\mathfrak{J}^2 m^2 + \mathfrak{J}'^2).$$

Da die Energieströmung in der Richtung  $\rho$  vor sich geht, muss auch die Geschwindigkeit der electrischen und magnetischen Kraftlinien diese Richtung haben.

Wir können also setzen

$$\alpha = \eta \frac{x}{\rho} \quad \beta = \eta \frac{y}{\rho},$$

wo  $\eta$  nur von  $\rho$  abhängt. Wir betrachten zunächst die magnetischen Kraftlinien. Dann ergeben die Gleichungen (5) mit Berücksichtigung von (10)

$$0 = n \mathfrak{J}' + \frac{d\eta}{d\rho} \mathfrak{J}' + \eta \frac{d\mathfrak{J}'}{d\rho}$$

und hieraus

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{\mathfrak{J}'} (\text{Const.} - \int n \mathfrak{J}' d\rho) \\ &= \frac{1}{\mathfrak{J}'} (C - n \mathfrak{J}). \end{aligned}$$

Bezeichnen wir andererseits die Geschwindigkeit der electrischen Kraftlinie mit  $\eta_1$ , so wird, wenn  $Z_1 = e^{nt} Z$  ist,

$$\frac{dZ_1}{dt} + \eta_1 \frac{dZ_1}{d\rho} + \left( \frac{d\eta_1}{d\rho} + \frac{\eta_1}{\rho} \right) Z_1 = 0,$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_1}{d\rho} + \frac{\eta_1 \frac{d}{d\rho} (\rho Z)}{Z \rho} + n &= 0 \\ \eta_1 &= \frac{1}{\rho Z} (C_1 - \int n \rho Z d\rho), \end{aligned}$$

dies ist nach (11) und (10)

$$\eta_1 = \frac{1}{\rho m^2 \mathfrak{J}} (C_1 - n \rho \mathfrak{J}).$$

Die Constanten  $C$  und  $C_1$  bestimmen sich dann aus unserer Forderung, dass die Energieströmung an einer vorge-

schriebenen Oberfläche durch die Bewegung der Kraftlinien dargestellt werden soll. Diese Oberfläche sei die Fläche  $\rho = a$ .

Dann muss sein für  $\rho = a$

$$\eta = \eta_1 = - \frac{2 n \mathfrak{J} \mathfrak{J}'}{m^2 \mathfrak{J}^2 + \mathfrak{J}'^2}.$$

Aus den beiden Gleichungen ergibt sich

$$C = - \frac{2 n \mathfrak{J} \mathfrak{J}'}{m^2 \mathfrak{J}^2 + \mathfrak{J}'^2} + n \mathfrak{J}$$

$$C_1 = - \frac{2 a n m^2 \mathfrak{J}^2 \mathfrak{J}'}{m^2 \mathfrak{J}^2 + \mathfrak{J}'^2} + n a \mathfrak{J}',$$

wo überall zur Abkürzung  $\mathfrak{J}$  und  $\mathfrak{J}'$  für  $\mathfrak{J}_{ma}$ ,  $\mathfrak{J}'_{ma}$  gesetzt ist.

Es geht aus diesen Untersuchungen hervor dass die von Faraday gebrauchte Darstellungsweise, die Veränderungen des ruhenden electromagnetischen Feldes durch die selbstständige Bewegung sonst unverändert bleibender Kraftlinien zur Anschauung zu bringen, die thatsächlichen Veränderungen stets richtig wiedergibt. Wenn aber hierbei relative Bewegungen der einzelnen Theile der Kraftlinien auftreten, so treten Veränderungen des Energievorrathes ein, welche bei wirklicher Bewegung der Kraftlinien infolge der Bewegung wägbarer Massen in der ponderomotorischen Arbeit ihre Compensation finden würden. Infolgedessen ist auch die Darstellung der Energieströmung nicht in der Form möglich, welche sie bei dem Maxwell'schen System für ruhende Körper annimmt und man kann eine Uebereinstimmung nur für die Oberfläche eines geschlossenen Raumes durch Festsetzung der Grenzbedingungen erzielen.



so ist für das isotrope Medium  $X, Y, Z$  mit  $P, Q, R$  identisch; für den aber hier zur Untersuchung stehenden Fall ist  $X, Y, Z$  mit  $P, Q, R$  durch die Gleichungen (12) verbunden, wenn man darin  $u, v, w$  durch  $X, Y, Z$  ersetzt, nämlich

$$(III) \quad \begin{cases} P = X + b_3 \frac{\partial Y}{\partial t} - b_2 \frac{\partial Z}{\partial t} \\ Q = Y + b_1 \frac{\partial Z}{\partial t} - b_3 \frac{\partial X}{\partial t} \\ R = Z + b_2 \frac{\partial X}{\partial t} - b_1 \frac{\partial Y}{\partial t}, \end{cases}$$

worin allgemein

$$(IV) \quad b = \mu \frac{D + i \frac{2T}{k}}{4\pi}$$

gesetzt ist.

Nun lassen sich die Gleichungen (7) unserer Mittheilung mit Hülfe (1) auf die Form bringen

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} &= \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}, & -\frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} &= \left( \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y} \right), \\ & & -\frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} &= \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

woraus nach der Elimination von  $P, Q, R$  mit Benutzung von (II) folgt

$$-\frac{1}{\mathfrak{B}_0} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} (b_2 X - b_1 Y) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} (b_1 Z - b_3 X)$$

und analoge Gleichungen für  $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ . Daraus ist klar, dass  $X, Y, Z, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  mit  $X, Y, Z, -L, -M, -N$  von Drude zusammenfallen, sodass wir in den gewonnenen Gleichungen das erste Tripel (53) von Drude haben. In unserer Theorie müssen ferner  $Q, R, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  an der Grenze zweier Medien continuirlich sein (vgl. § 2): infolge (III) stimmen auch diese Bedingungen mit den Gleichungen (58) von Drude.

Weiter berechnen wir aus den früheren Gleichungen (2), (6), (7)

$$4\pi u = -\mathfrak{B}_0 \left( \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} \right) \text{ etc.}$$

und nach (II)

$$\left( D + i \frac{2T}{k} \right) \frac{\partial X}{\partial t} = -\mathfrak{B}_0 \left( \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} \right) \text{ etc.}$$

oder anders





Aus einer privaten Quelle, und durch eine freundlich Mittheilung bin ich schon seit Februar davon benachrichtigt dass in einem der physikalischen Institute Europas Untersuchungen über das Kerr'sche Phänomen bei Ni und Co angefangen worden sind. Es ergaben sich, als Resultat der Vorversuche, Werthe von  $\delta$ , die viel weniger als  $80^\circ$  betragen, nämlich etwa  $-50^\circ$  für Co und  $-30^\circ$  für Ni.

Dadurch wird offenbar die Richtigkeit der Annahme (V) auch für Ni und Co widerlegt; *alle* Erklärungssysteme der magnetooptischen Erscheinungen, welche, wie dasselbe von Drude, nur eine einzige Constante einführen, stehen daher mit der Erfahrung nicht im Einklang.

Kasan, 27/15. Juli 1892.



# XI. *Zur Geschichte des Leidenfrost'schen Phänomens; eine literar-historische Notiz* von G. Berthold.

---

„Nodus hic vestro dignus acumine“, rief Hermann Boerhaave seinen Zuhörern zu<sup>1)</sup>, nachdem er ihnen folgenden Versuch vorgeführt hatte. „Betrachten sie nun aber mit Aufmerksamkeit dies wunderbare Experiment. Hier in diesem kleinen Glase habe ich den reinsten Alkohol, von dem ich eine geringe Menge über dieses glühende Eisen giesse. Was wird Ihrer Erwartung nach nun geschehen? Wird sich der Alkohol entzünden? Ich sollte meinen, dass niemand daran zweifeln wird. Aber weitgefehlt. Denn sehen Sie, sobald der Alkohol auf diese hohle Fläche des glühenden Eisens fällt, wird er sofort zu einer glänzenden Kugel geformt, ähnlich dem Quecksilber, und läuft in der Art wie jenes über das Eisen hin, ohne das geringste Zeichen des Entflammens. Indem er aber jetzt in seinem Laufe auf eine kältere Stelle des Eisens trifft, wird er sofort in die Lüfte zerstreut und zwar ohne irgend eine Flamme zu erregen. Wie verhält sich das, meine Herren Zuhörer? Schwefel, Schiesspulver, Holz und andere Substanzen gerathen, wenn sie mit diesem Eisen in Berührung gebracht werden, sofort in Brand. Alkohol, welcher langsam erwärmt von fast allen Substanzen sich am leichtesten entzündet, verträgt diese Hitze und entzündet sich derweilen nicht.“

Es ergibt sich aus Obigem unzweifelhaft, dass sonach auf Boerhaave die erste Beobachtung und Beschreibung (1732) des Leidenfrost'schen Phänomens zurückzuführen ist, während die Beobachtung Eller's, welche bekanntlich bisher als die erste betrachtet wurde, vierzehn Jahre später fällt (1746). Boerhaave gibt bereits eine präzise Beschreibung des Phänomens, während Eller's vage Bemerkung sich darauf beschränkt, dass, als er Wassertropfen auf heisses Glass be-

---

1) *Elementa chemiae*. Lugd. Bat. 1732. 4°. t. I. p. 2. exp. XII p. 258.



auf dem glühenden Metall rolle, ohne letzteres fast zu berühren umgekehrt zeige sich nur eine sehr langsame Verdampfung wenn glühendes Eisen in kaltes Wasser getaucht werde.

Eingehender über die Umkehrung des Leidenfrost'schen Versuches berichtet<sup>1)</sup> schliesslich Socquet, welcher in der Spiegelmanufactur Briati in Venedig beobachtet hatte, dass eine glühende Glasmasse von circa vierzig Pfund Gewicht in ein mit kaltem Wasser gefülltes grosses Marmorbassin taucht, keine augenblickliche Verdampfung bewirkte, sondern in dem ruhigen Wasser als rothglühende Masse deutlich zu sehen war, und nur da, wo das Eisen, mit welchem die Glasmasse gehalten wurde, mit dem Wasser in Berührung kam ein Aufbrausen erfolgte.

1) Journal de physique. Paris 1799. 4<sup>o</sup>. t. VI. p. 441. — Gilbert Ann. 1800. 6. p. 407.

















mittelbar nach der Untersuchung wurden die Widerstände in den Exsiccator gelegt und meist einige Tage später nochmals geprüft.

Tabelle 1.  
Widerstandsänderung durch Erwärmung auf 110°.

	Vorher	Nachher	Nach 12 Tagen
I. 1. Goldfarben	350 000	3 920	4 210
I. 2. Kupferfarben	8 930	128	153
I. 3. Dunkelbraun	79 600	19 600	24 000
II. 1. Hellblau	1 110	263	285
II. 4. Goldfarben	55 000	575	788

Die Farbe der Blätter war durch die Erwärmung nicht wesentlich verändert worden.

Tabelle 2.  
Widerstandsänderung durch Erwärmung auf 160°.

	Vorher	Nachher	Nach 8 Tagen
I. 1. Goldfarben	280 000	100	108
I. 2. Kupferfarben	13 200	7,0	8,2
I. 3. Dunkelbraun	59 000	6,4	7,4
II. 1. Hellblau	1 240	203	247
II. 3. Olivengrün	∞	∞	∞
II. 4. Goldfarben	13 900	46,4	51,0
III. Hellgrün	∞	9 200	10 000
III. Hellgelb	∞	700	790
III. Broncefarnen	∞	730	745
IV. Hellblau	∞	∞	∞

In diesem Falle war die Färbung der meisten Blätter in Grau von verschiedenen Nuancen übergegangen. Nur II, 3 und IV waren auch dem Ansehen nach unverändert geblieben.

Tabelle 3.  
Widerstandsänderung durch Erwärmung auf 200°

	Vorher	Nachher
I. 2. Kupterfarben	15 000	2,9
I. 3. Dunkelbraun	70 000	4,7
II. 4. Goldfarben	6 930	51,4
III. Gelbgrün	∞	113
III. Broncefarnen	∞	39,4
IV. Hellblau	∞	∞



Tabelle 5.  
I. 2. Kupferfarben.

$\lambda$	$t$	$w$	$\lambda$	$t$	$w$
0	18°	3080	Hierauf Abkühlung und neue Erwärmung.		
2	43°	2800			
4	54°	2000		20°	7,6
6	72°	1000		70°	8,1
8	89°	600		115°	8,6
10	110°	300		150°	8,9
13	121°	150		170°	8,8
15	128°	100		195°	8,0
20	140°	30		205°	7,6
28	147°	15		220°	7,2
38	154°	10	Bei weiterer Erwärmung schnell Zunahme des Widerstandes		
41	170°	9			

Tabelle 6.  
II. 1. Blaugrün.

$\lambda$	$t$	$w$	$\lambda$	$t$	$w$
0	20°	19 040	0	20°	83,4
	50°	18 000		45°	88,6
	80°	15 000		60°	87,0
	95°	10 000		100°	77,0
	110°	3 000	7'	150°	64,0
6'	115°	1 000	Abkühlung		
15'	115°	150			
	125°	100		20°	62
	130°	80			
Hierauf Abkühlung und später neue Erwärmung					

Tabelle 7.  
III. Hellgrün.

$\lambda$	$t$	$w$	$\lambda$	$t$	$w$
0	20°	$\infty$	0	18°	2190
	50°	$\infty$		30°	2300
	55°	Beginn der Leitung		50°	2100
	80°	1 000 000	10'	75°	1900
	90°	500 000		130°	980
	110°	30 000	Abkühlung und dann abermalige Erwärmung		
	120°	10 000		18°	1244
10'	125°	5 000		50°	1170
15'	125°	3 000		90°	1040
	135°	2 000		100°	1000
	140°	1 800		125°	900
Hierauf Abkühlung und später neue Erwärmung.				135°	840
Bei weiterer Erwärmung Zunahme des Widerstandes bis $\infty$					

















durch Behandlung mit Chemikalien ertheilt werden kann, mit Vorthail für manche Zwecke bei den Arbeiten mit grossen Silberwiderständen zu verwenden. Werden die Enden eines längeren Silberstreifens in eine entsprechende Salzlösung getaucht und gut leitend gemacht, so braucht nun bei dem Einspannen derselben zwischen Klemmschrauben keine besondere Vorsicht mehr angewandt werden, da dieselbe jetzt eine gut leitende Schicht fasst, von der aus erst der Uebergang in den schlechten Leiter stattfindet.

## 12.

Schon in der ersten Mittheilung wurde ausführlich erörtert, dass die *Feuchtigkeit* der Silberstreifen einen bedeutenden Einfluss auf ihren Widerstand ausübt, dass häufig erhebliche Schwankungen während der Beobachtung, sowie wesentliche Veränderungen bei Wiederholung der Bestimmung nach einiger Zeit durch den veränderlichen Feuchtigkeitsgehalt ihre Erklärung finden. Es wurden über diesen Gegenstand zahlreiche weitere Beobachtungen angestellt.

Um in einfachster Weise den Feuchtigkeitsgehalt vermehren zu können, wurde eine Vorrichtung benutzt, mit deren Hülfe ein Strom von Luft, welche bei verschiedenen Temperaturen mit Wasserdampf beladen war, gegen das Blättchen gerichtet wurde. Dieselbe bestand aus einer Kochflasche, die mit einem Kork verschlossen war. Zwei Durchbohrungen desselben enthielten eine lange und eine kurze, oben umgebogene Glasröhre, von denen erstere in die Flüssigkeit eintauchte. Der durch diese eingeblasene Luftstrom nahm Wasserdampf in grösserer Menge auf und führte denselben durch die andere Röhre gegen das zu untersuchende Präparat. Je nach der Temperatur des Wassers enthielt er kleinere oder grössere Mengen Feuchtigkeit.

Ich gebe zunächst ein ausführliches Beispiel eines mit dieser Vorrichtung angestellten Versuches. Die beistehenden Zahlen bedeuten, wie gewöhnlich, die Widerstände in Ohm.

Untersucht wurde ein Silberstreifen (hellgrün) II, 1, von 14 cm Länge und 1 cm Breite. Der Streifen war zwischen Klemmschrauben ausgespannt und blieb während der ganzen Versuchsreihe unberührt.





selbe von Luft oder von verdünnter Schwefelsäure umgeben sein. Dagegen war der Widerstand eines Kupferdrahtes kleiner, wenn derselbe in eine Kupfervitriollösung tauchte. Im ersten Falle verhinderte die starke Polarisation des Platins vollständig die Bildung eines Zweigstromes. Im zweiten Falle konnte ein solcher zu Stande kommen. Unter geeigneten Umständen kann dann die im Nebenzweige auftretende Polarisation eine scheinbare Vergrößerung des Widerstandes hervorbringen. Allerdings sollte man in diesem Falle die folgenden Anzeichen derselben erwarten:

1. Nach Einstellung der Nadel auf den Nullpunkt durch entsprechende Widerstandsänderung in dem anderen Leiterzweig müsste bei Oeffnung des Hauptstromes ein Ausschlag erfolgen, welcher von der electromotorischen Kraft der vorhandenen, wenn auch vielleicht schnell verschwindenden Polarisation herrührt.

Ebenso sollte, wenn nach einiger Zeit der Strom wieder geschlossen wird, ein Ausschlag im entgegengesetzten Sinne stattfinden.

2. Bei Aenderung der electromotorischen Kraft der Kette sollte man andere scheinbare Widerstände finden, da ja gewöhnlich die Polarisation nicht dem polarisirenden Strome proportional ist.

Einfache Versuche bestätigen dies. Als zu einem Silberblatt ein Nebenzweig, bestehend aus einer U-förmigen Röhre mit verdünnter Schwefelsäure und eintauchenden Kupferdrähten, hergestellt wurde, traten die beschriebenen Erscheinungen deutlich hervor.

Bei den Widerstandsbestimmungen mehr oder weniger feuchter Silberblätter waren dieselben nicht wahrzunehmen. Es erfolgten nach richtiger Abgleichung keine Ausschläge beim Oeffnen und Schliessen. Ebenso war es gleichgültig, ob die Kette aus zwei, drei oder sechs Elementen bestand. Wenn daher an der oben gegebenen Erklärung festgehalten werden soll, so dürfen wir den Sitz der Polarisation, die jedenfalls eine bedeutende sein müsste, nicht an den beiden Electroden suchen. Man wird annehmen müssen, dass die Silberschicht aus einem Netzwerke leitender Molecülgruppen besteht, zwischen welche sich die condensirte Feuchtigkeit als Nebenschluss ein-







Zustände, welche das Silber bis zu seiner Ausscheidung durchläuft.

Dass Metalle, welche auf chemischem oder galvanischem Wege aus den Lösungen ihrer Salze reducirt werden, in ihrem Aussehen und in ihren Eigenschaften wesentlich verschieden von dem gewöhnlichen Metallzustande sind, ist eine wohlbekannte Thatsache. Besonders ist dies der Fall, solange sie in geringer Menge oder in dünnen Schichten vorhanden sind. Nicht allzu zahlreich sind genauere Untersuchungen dieser Zustände.

Ohne Anspruch auf Vollständigkeit der Literatur zu machen, möchte ich folgende Arbeiten hier anführen. Die optischen Eigenschaften dünner, auf sehr verschiedene Art hergestellter Goldblätter hat Faraday <sup>1)</sup> untersucht. Derselbe hat gefunden, dass die Goldblätter weitgehende Veränderungen durch eine Reihe von Einwirkungen erfahren. Ferner hat H. Vogel <sup>2)</sup> „die Zustände, in denen das Silber bei der Reduction seiner Salze auf nassem Wege auftritt“, untersucht. Derselbe unterscheidet drei Modificationen: *Spiegelsilber*, *regelmässig baumförmiges Silber*, *körnig pulveriges Silber*. Den beiden letzten Modificationen fehlt der Metallglanz, die zweite besteht aus einem grauen bis schwarzen, die dritte aus einem grauen Pulver. Ersteres ist wenig stabil und geht entweder von selbst mit der Zeit oder sofort bei Behandlung mit verdünnten Säuren in die letzte Modification über. Vielfach hat H. Vogel beobachtet, dass die von ihm untersuchten Silberschichten durch Drücken mit einem Glasstab in glänzendweisses Silber sich verwandeln.

Ich glaube annehmen zu dürfen, dass verschiedene der von mir hergestellten Silberschichten (von dunkelgrauer Farbe), besonders aber die Silberarten nach Behandlung mit Salzlösungen mit diesen Modificationen identisch sind.

In seinen optischen Untersuchungen (besonders in seiner Abhandlung „Ueber die optischen Eigenschaften der Metalle“<sup>3)</sup>) behandelt G. Quincke die Verschiedenartigkeit dünner Silber-

---

1) Faraday, Philos. Transact. of the Roy. Soc. of London. 147. p. 145. 1888.

2) H. Vogel, Pogg. Ann. 117. p. 316. 1862.

3) G. Quincke, Monatsber. der Berl. Akad. f. 1863. p. 115.









## II. *Ueber die Brechungsexponenten verdünnter Lösungen; von Wilhelm Hallwachs.*

---

Vor länger als zwei Jahren stellte ich in Gemeinschaft mit Hrn. Stradling eine Voruntersuchung zur Auffindung einer Methode für die genaue Messung der Brechungsexponentendifferenzen von Wasser und verdünnten wässerigen Lösungen an. Bestimmungen dieser Differenzen für sehr verdünnte Lösungen lagen noch nicht vor. Wir nahmen den Interferentialrefractor als Messinstrument in Aussicht, und es gelang, denselben unserem Zwecke dienlich zu machen. Nachdem die Arbeit dann längere Zeit geruht hatte, wurde sie vor einem Jahre von mir wieder aufgenommen und ihre hauptsächlichsten Resultate vor einigen Monaten veröffentlicht.<sup>1)</sup> Das Hauptziel der Arbeit war zu untersuchen, ob die z. B. aus dem electrischen Leitungsvermögen folgenden Constitutionsänderungen, welche beim Verdünnen wässriger Lösungen eintreten, auch auf die Lichtgeschwindigkeit in denselben einen Einfluss gewinnen. Zur Entscheidung dieser Frage ist ausser der Kenntniss der Brechungsexponentendifferenzen auch diejenige der Dichteunterschiede der verdünnten Lösungen gegen Wasser erforderlich, für welche genügend genaue Bestimmungen noch nicht ausgeführt worden sind. Die vorliegende Mittheilung enthält den optischen Theil der Untersuchung.

### § 1. Messmethode.

Schaltet man in die zwei monochromatischen Lichtbündel eines Interferentialrefractors zunächst zwei gleiche Körper ein und bringt dann eine Zustandsänderung des einen derselben hervor, so erfolgt eine Verschiebung des Streifensystems. Dieselbe lässt sich einfach durch Abzählen der am Fadenkreuz vorbeiwandernden Streifen ermitteln und daraus die Aenderung des Brechungsexponenten bestimmen, sobald die Zustandsänderung continuirlich und in allen Theilen des Körpers so

---

1) W. Hallwachs, Gött. Nachr. 1892. Nr. 9.



Phasendifferenz von gleicher Grösse eintritt. Der Werth derselben ist abhängig von dem Verhältniss, in welchem die beiden entgegenwirkenden „Apparate“ die Gangunterschiede für verschiedene Farben einführen.

Führt z. B. der Refractor die Gangunterschiede für die Linien  $F$  und  $C$  im Verhältniss  $7,5 : 5,5$  ein, die Lösung im Verhältniss  $7,0 : 5,0$ , wie es etwa für  $\text{Zn SO}_4$ -Lösung der Fall ist, so wird beim Gegeneinanderwirken von  $7,5$  gegen  $7,0$  Wellenlängen für  $F$  sowohl für  $F$  als auch für  $C$  die gleiche Phasendifferenz von  $0,5$  Wellenlängen resultiren. Für die anderen Farben der Lichtquelle resultirt dann im allgemeinen ein sehr nahe gleicher Gangunterschied, sodass man einen achromatischen und zwar schwarzen Streifen bekommt. Würden überall die doppelten Differenzen in der Phase hervorgebracht, so wäre die Achromasie weiss, entsprechend einer ganzen Wellenlänge Phasendifferenz für alle Farben.

Es ändert sich also mit dem Wachsen der gegeneinander wirkenden Gangunterschiede auch die zur Achromasie gehörige resultirende Phasendifferenz, d. h. die Achromasie wandert auf dem mit Natriumlicht erhaltenen compensirten Streifensystem unter Anpassung ihrer Helligkeit an diejenige der darin entsprechenden Stellen langsam fort.

Bei verdünnten Lösungen hat sich die Wanderung als einfach proportional der gesammten Streifenverschiebung ergeben; z. B. wandert bei  $\text{Zn SO}_4$  die Achromasie immer für  $12,5$  Streifenbreiten Verschiebung im Natriumlicht um einen Streifen weiter und zwar für grosse und kleine Anfangsconcentrationen um denselben Betrag. Die Grösse dieser Wanderung lässt sich daher verhältnissmässig einfach durch einen Hilfsversuch bestimmen. Aus diesem ergibt sich dann jedesmal wann der zur optischen Compensation einer Lösungsänderung nöthige Gangunterschied des Refractors ermittelt ist, welche Nummern die dunkeln Nachbarstreifen der Achromasie ursprünglich hatten, d. h. wie weit sie vom einmal gewählten Nullpunkt abstehen.

Dieser nach ganzen Streifenbreiten zählende Abstand liefert die oben erwähnte Correction und ist, je nachdem die Wanderung im Sinne der Verschiebung des Streifensystems bei der Lösungsänderung erfolgt oder im entgegengesetzten, von der



Durch dieses gesehen hatten die horizontalen Interferenzstreifen meist einen scheinbaren Abstand von etwa 1 cm.

Um mit der Verdünnung möglichst weit kommen zu können, war ein Flüssigkeitstrog von möglichst grosser Länge wünschenswerth. Mit wachsender Länge steigen sowohl die Anforderungen an Gleichheit der Temperatur in beiden Zellen und die Schwierigkeit diese zu erzielen, als auch die Anforderungen an die Grösse der festen Unterlage für die Apparate. Unter Berücksichtigung dieser Umstände wurde ein 21 cm langer zweizelliger Trog mit umgebendem Wasserbad construirt (vgl. Fig. 1 und 2).

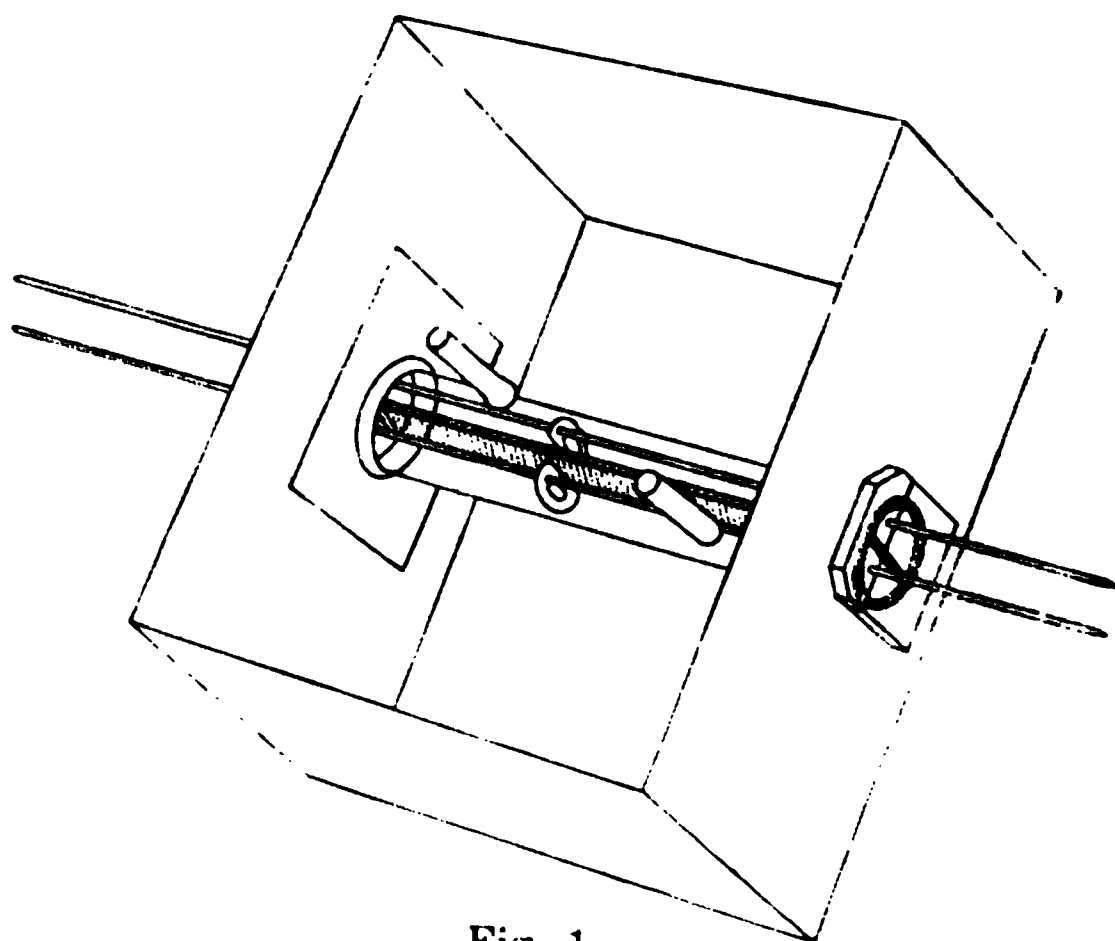


Fig. 1.

Das Innere eines Glasrohres von 4 cm Durchmesser und 21 cm Länge theilte ein in einer Durchmessersebene mit Wachs und Kolophonium eingekitteter Platinstreifen in zwei Längshälften, welche durch seitlich angeschmolzene Röhrchen ihren Zugang, und ihren Abschluss an den Enden durch aufgekittete Glasplatten erhielten. Zur Sicherung des Abschlusses (Fig. 2) steckten die Rohrenden  $r$  in Messingfassungen mit eben abgeschliffener Endfläche  $m$  für die Kittung, und der Rand  $p$  der Platinscheidewand war rechtwinkelig in die Schliffebene eingebogen.

Um zum Ausgleich von Temperatur und Concentration Rührer zu haben, gingen durch gegenüberliegende, auspolirte Löcher  $l$  in den Verschlussplatten vor dem obersten Theile



und gesenkt werden. Die in ihm ruhende Libelle erhielt senkrecht einen seitlichen, horizontalen Ansatz in Gestalt eines Eisenstäbchens, welches an seinem äusseren Ende ein kurzes, verticales Stahlstäbchen mit zwei guten Spitzen trug. Letzteres war etwas kürzer wie die Trogweite. Nach geeigneter, fester Aufstellung des Troges mit den Endplatten in der Horizontalen stand das Stahlstäbchen im Inneren des Troges so ein, dass es die Endplatten fast berührte. Nach Auflage eines kleinen Uebergewichtes zuerst auf die eine, dann auf die andere Seite der sonst äquilibrirten Libelle kamen die Spitzen des Stäbchens mit den Endplatten in Berührung. Durch Handhabung der Schraube stellte man beidemal bei der Berührung die Libelle ein. Der Unterschied der Einstellungen lieferte dann den Ueberschuss der Trogdicke über die Länge des mit dem Comparator gemessenen Stahlstäbchens. Für die Trogdicke an der in den Versuchen benutzten Stelle ergab sich 8,81 mm.

Die Dickenmessung geschah sodann auf eine zweite, wohl überlegene Methode. In jede Trogzelle wurde eine dieselbe fast ganz ausfüllende, gute Spiegelglasplatte eingeschoben und der frei bleibende Raum mit Wasser gefüllt. Nach Einschaltung in den Interferenzrefractor gelangte die Streifenverschiebung, welche beim Ersetzen des Wassers in der einen Troghälfte durch concentrirte NaCl-Lösung eintrat, zur Messung. Die Verschiebung lieferte mit Hülfe der bekannten Brechungsexponenten der Lösung und des Wassers den Dickenunterschied zwischen Trog und Glasplatte. Nach Ermittlung der Dicke der letzteren ergab sich die Trogdicke gleich 8,825 mm. Die beiden Werthe stimmen bis auf 1,7 Pronille überein.

Die Länge des grossen Troges ergab sich aus Messungen mit dem Kathetometer zu 211,6 mm. Das Verhältniss der Troglängen betrug also 23,98.

### § 3. Lösungen.

Die verschiedenen benutzten Lösungen nahmen bei jeder Substanz ihren Ausgang von einer solchen von grösserer Concentration, z. B. einer Normallösung, deren Gehalt meist durch Dichtebestimmung ermittelt wurde. Aus ihr ging zunächst durch Verdünnen mit Pipette und Messkolben die stärkste Lösung, welche im kleinen Trog bestimmt werden sollte, hervor. Alle übrigen entstanden aus der letzteren unmittelbar vor dem





§ 4. Ausführung der Messungen. <sup>1)</sup>

## a) Hilfsversuche.

Zur Ermittlung des nach § 1 erforderlichen Ganges der Achromasie gelangte bei den meisten Substanzen eine besondere Versuchsreihe zur Ausführung. Variationen der zur Achromasie gehörigen Phasendifferenz waren am schärfsten erkennbar, wenn diese Differenz eine ungerade Anzahl von halben Wellenlängen betrug, d. h. die Achromasie auf einen schwarzen Streifen fiel. Man liess daher diejenige beim Verstärken der Lösung eintretende Streifenschiebung im Natriumlicht, welche einer Wanderung der Achromasie von einem schwarzen auf den nächsten schwarzen Streifen entsprach, den Gang der Achromasie liefern.

Zu diesem Zwecke wurde zuerst dem Wasser in der einen Troghälfte so lange langsam von einer concentrirteren Lösung zugefügt, bis die Achromasie auf einen schwarzen Streifen fiel. Drehungen der zweiten Refractorplatte erhielten dabei die Achromasie im Gesichtsfeld und brachten schliesslich den schwarzen Streifen an die Spitze der Ocularschraube. Nach Ersetzung der Lösung durch Wasser gelangte, unter Benutzung von Na-Licht, die der optischen Differenz von Wasser und Lösung entsprechende Streifenverschiebung zur Ermittlung. Dieselbe entsprach nicht der Wanderung der Achromasie um eine volle Streifenbreite, da die, auch zu Anfang des Versuches, wenn in beiden Zellen Wasser war, der unvermeidlichen Ungleichheiten beider Lichtwege halber vorhandene Phasendifferenz nicht gerade eine ungerade Anzahl halber Wellenlängen betrug.

Nachdem darauf die erste Lösung wieder an Stelle des Wassers der einen Troghälfte getreten war, verstärkte man dieselbe weiter bis zur Verschiebung der Achromasie um eine volle Streifenbreite und ermittelte auf analoge Weise wie oben die entsprechende Streifenverschiebung.

---

Abhdlgn. d. sächs. Akad. math.-phys. Classe, 15. Nr. 2 p. 95. 1889.  
(Weinsäure und Essigsäure.)

1) Bei den ersten Versuchsreihen und verschiedenen Hilfsmessungen hat mich Hr. Dr. Zahn unterstützt, wofür ich ihm auch an dieser Stelle meinen besten Dank sage.



Um etwaige kleine Nachwirkungen, die sich mit der zuerst angewendeten, später in ihrer Construction mit Erfolg verbesserten Mikrometerschraube zur Drehung der zweiten Refractorplatte hätten ergeben können, zu eliminiren, wurde für die Ermittlung der Bruchtheile der Streifenverschiebung besondere Versuchsreihen ausgeführt, bei welchen die genannte Platte ihre Lage behielt.

## § 5. Resultate.

### a) Genauigkeit.

Die sehr schönen Interferenzstreifen von etwas mehr als 1 cm scheinbarem Abstand standen, rasche Temperaturänderungen des Zimmers ausgenommen, sehr ruhig, verschoben sich z. B. in einer Woche nicht mehr als um 0,1 Streifenbreite, sodass die für den Temperatúrausgleich nothwendigen Pausen keine merkbaren Fehler wegen Aenderung der Nulllage veranlassten. Ausnahmsweise traten vorübergehend ziemlich rasche Schwankungen hin und her bis zu 0,1 Streifenbreiten ein, wohl durch Luftströmungen veranlasst.

Die ermittelten Streifenverschiebungen sind nach meiner Schätzung im allgemeinen etwa auf 0,1 Streifenbreiten genau. Bei der verdünntesten Lösung der einzelnen Substanzen habe ich die Genauigkeit nicht ganz soweit treiben können. Vielleicht hat dabei die nicht ganz einfache Manipulation des Entleerens und Wiederfüllens des Troges einen Einfluss ausgeübt.

Die Versuche mit Zucker, NaCl und  $MgSO^4$  gelangten zuerst zur Ausführung, die mit den anderen Substanzen später nach kleinen Abänderungen in der Ausführungsweise der Versuche. Deshalb sind die letzteren den ersteren an Genauigkeit wohl etwas überlegen.

### b) Temperatur.

Um der Bestimmung des Temperaturcoefficienten, welche wegen der für die Ruhe der Streifen geforderten allseitig gleichen Temperatur sehr umständlich ist, überhoben zu sein, habe ich letztere bei den Versuchen constant gehalten; der Beobachtungsraum gestattete dies vollkommen genügend. Einige Bestimmungen von jenen Coefficienten lieferten den Nachweis, dass die noch übrig bleibenden kleinen Temperaturschwankungen ohne schädlichen Einfluss sind.

Bei den im Sommer ausgeführten Versuchen des Hrn. Forch sind die Temperaturänderungen etwas grösser. Jedoch würden deshalb die Werthe von  $v \Delta n$  (s. § 5 c) für die grösseren Verdünnungen nur im Maximum um 0,5 bis 0,6 Proc. zu verkleinern sein.

c) Zusammenstellung der Bestimmungen. <sup>1)</sup>

In der folgenden Uebersicht der Bestimmungen bedeutet:  
 $v$  die Verdünnung; Volumen der Lösung, welches ein Grammäquivalent enthält, in Litern;

$\Delta n$  die Differenz der Brechungsexponenten von Wasser und Lösung für Natriumlicht;

$z$  die zur vorigen gehörige Streifenverschiebung;

$v \Delta n$  die moleculare Brechungsänderung;

$t$  die Temperatur;

$\lambda$  das specifische moleculare Leitungsvermögen <sup>2)</sup>;

$\alpha = \lambda / \lambda_{\infty}$ ;  $\lambda_{\infty}$  ist das  $\lambda$  für  $v = \infty$ . <sup>2)</sup>

$\frac{1}{2} \text{H}^2 \text{SO}^4$ .

$v$	$z$	$t$	$10^4 \Delta n$	$100 v \Delta n$	$\lambda 10^7$	$\alpha$
2,01	45,47	13,2	30,36	<u>0,610</u>	189	0,50
2,68	34,66	13,2	23,15	<u>0,620</u>	191	0,50
4,02	23,55	13,2	15,73	<u>0,632</u>	196	0,52
(8,04)	(12,65)	(13,1)	(8,45)	(0,679)	206	0,54
64,4	45,83	13,0	1,276	<u>0,822</u>	274	0,72
96,6	31,41	13,0	0,875	<u>0,844</u>	285	0,75
(193,2)	(15,98)	(13,1)	(0,445)	(0,859)	302	0,80
$\infty$					380	

H Cl.

$v$	$z$	$t$	$10^4 \Delta n$	$100 v \Delta n$	$\lambda 10^7$	$\alpha$
2,99	41,67	13,3	27,83	<u>0,838</u>	307	0,86
5,98	20,98	13,2	14,01	<u>0,844</u>	319	0,90
71,8	42,51	13,1	1,184	<u>0,856</u>	341	0,96
143,6	21,33	13,1	0,594	<u>0,859</u>	342	0,96
$\infty$					355	

1) Einige früher, Gött. Nachr. 1892 Nr. 9, vernachlässigte, kleine Correctionen sind jetzt angebracht. Die Verdünnungen der  $\text{Zn SO}^4$ -Lösungen waren früher 6,5 Proc. zu klein angenommen.

2) Nach F. Kohlrausch und für Essigsäure und Weinsäure nach W. Ostwald, l. p. 388 cit.

$\frac{1}{2}$  Mg SO<sup>4</sup>.

<i>v</i>	<i>z</i>	<i>t</i>	10 <sup>4</sup> <i>Δ n</i>	100 <i>v Δ n</i>	<i>λ</i> 10 <sup>7</sup>	<i>n</i>
4,02	46,10	13,9	30,78	<u>1,237</u>	39,2	0,37
8,04	23,46	13,8	15,67	<u>1,259</u>	45,2	0,44
96,6	49,10	14,5	1,366	<u>1,320</u>	70,5	0,66
193,2	24,81	14,1	0,690	<u>1,334</u>	78,5	0,74
(386)	(12,63)	(14,2)	(0,352)	(1,36)	86,0	0,81
∞					106,5	

$\frac{1}{2}$  Zn SO<sup>4</sup>.

<i>v</i>	<i>z</i>	<i>t</i>	10 <sup>4</sup> <i>Δ n</i>	100 <i>v Δ n</i>	<i>λ</i> 10 <sup>7</sup>	<i>n</i>
5,32	42,02	13,5	28,06	<u>1,495</u>	37,5	0,35
10,65	21,29	13,5	14,22	<u>1,515</u>	43,2	0,41
127,9	44,71	13,6	1,245	<u>1,593</u>	70,4	0,67
255,8	22,54	13,6	0,628	<u>1,606</u>	78,5	0,74
(512)	(11,19)	(13,6)	(0,312)	(1,59)	85,0	0,80
∞					106,6	

Na Cl.

<i>v</i>	<i>z</i>	<i>t</i>	10 <sup>4</sup> <i>Δ n</i>	100 <i>v Δ n</i>	<i>λ</i> 10 <sup>7</sup>	<i>n</i>
4,00	38,8	13,8	25,9	<u>1,04</u>	80,8	0,78
8,00	19,5	14,1	13,0	<u>1,04</u>	85,1	0,82
96,1	39,7	14,1	1,10	<u>1,06</u>	95,7	0,92
192,2	19,7	14,1	0,551	<u>1,06</u>	97,7	0,94
(384)	(10,1)	(14,1)	(0,281)	(1,08)	99,3	0,96
∞					104,0	

Zucker.

<i>v</i>	<i>z</i>	<i>t</i>	10 <sup>4</sup> <i>Δ n</i>	100 <i>v Δ n</i>	<i>n</i>
16,0	46,2	14,0	30,9	<u>4,93</u>	0
52,0	23,4	13,9	15,63	<u>4,99</u>	
384	46,4	14,0	1,29	<u>4,97</u>	
769	23,5	14,2	0,653	<u>5,03</u>	
(1573)	(11,8)	(14,1)	(0,328)	(5,04)	

beobachtungen des Hrn. Forch:

$\frac{1}{2}$  Cu SO<sup>4</sup>.

	$\alpha$	$t$	$10^4 \Delta n$	$100 v \Delta n$	$\lambda \cdot 10^7$	$\alpha$
8	53,42	16,3	35,68	<u>1,456</u>	33,7	0,31
6	27,10	16,4	18,10	<u>1,477</u>	39,0	0,36
2	13,83	16,3	9,24	<u>1,508</u>	45,3	0,41
	57,28	16,7	1,595	<u>1,564</u>	65,8	0,60
	28,66	16,3	0,798	<u>1,565</u>	74,3	0,68
	14,32	16,8	0,399	<u>1,563</u>	83,3	0,76
					110,0	

$\frac{1}{2}$  Na<sup>2</sup> CO<sup>3</sup>.

	$\alpha$	$t$	$10^4 \Delta n$	$100 r \Delta n$	$\lambda \cdot 10^7$	$\alpha$
2	76,00	15,9	50,77	<u>1,178</u>	51,0	0,40
4	38,86	15,9	25,96	<u>1,205</u>	60,0	0,47
8	19,63	15,8	13,12	<u>1,217</u>	66,0	0,52
	80,59	16,4	2,244	<u>1,249</u>	84,5	0,67
	40,86	16,2	1,138	<u>1,253</u>	90,5	0,71
	20,43	16,4	0,569	<u>1,268</u>	96,5	0,76
					126,5	

Essigsäure.

	$\alpha$	$t$	$10^4 \Delta n$	$100 v \Delta n$	$\lambda \cdot 10^7$	$\alpha$
9	60,83	15,3	40,64	<u>0,443</u>	1,4	0,00
8	30,57	15,2	20,42	<u>0,445</u>	2,2	0,01
6	15,35	15,1	10,25	<u>0,447</u>	2,9	0,01
8	62,00	16,2	1,727	<u>0,452</u>	7,7	0,02
	31,00	16,4	0,863	<u>0,452</u>	10,9	0,03
	15,52	16,4	0,432	<u>0,452</u>	15,1	0,04
					360	

Weinsäure.

	$\alpha$	$t$	$10^4 \Delta n$	$100 r \Delta n$	$\lambda \cdot 10^7$	$\alpha$
25	65,03	16,6	43,44	<u>0,923</u>	15,7	0,04
5	32,82	16,7	21,93	<u>0,932</u>	21,9	0,06
0	16,52	16,7	11,04	<u>0,938</u>	30,5	0,09
5	68,92	17,5	1,919	<u>0,980</u>	73,3	0,20
	34,92	17,3	0,972	<u>0,992</u>	96,3	0,27
	17,79	17,3	0,495	<u>1,011</u>	128,6	0,36
					360	

Die Zahlen der vorstehenden Tabellen ergeben eine deutende Zunahme von  $v \Delta n$ , des „molecularen Brechungszuwachses“, mit der Verdünnung bei Schwefelsäure;  $\text{MgSO}_4$ ,  $\text{ZnSO}_4$ ,  $\text{CuSO}_4$ ,  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  und Weinsäure zeigen ebenfalls einen beträchtlichen;  $\text{HCl}$ ,  $\text{NaCl}$  und Essigsäure einen kleinen, aber bemerkbaren Anstieg.

Für Zucker ist Folgendes zu bemerken. Man gewöhnte sich die einzelnen Lösungen nicht direct aus der Ausgangslösung wie bei den anderen Substanzen, sondern die Lösung  $v = 8$  wurde aus der von  $v = 16$ , die Lösung  $v = 769$  aus der von  $v = 32$  gewonnen. Die letztere scheint nicht genau die doppelte Verdünnung besessen zu haben, wie die  $v = 16$  Lösung; Tabelle zeigt dies. Um einen etwaigen Einfluss der Verdünnung auf den Gang von  $v \Delta n$  zu constatiren, sind also hier die Lösungen  $v = 16$  und  $v = 384$  mit einander zu vergleichen ebenso  $v = 32$  und  $769$ . Ein Einfluss der Verdünnung zum mindesten sehr gering.

#### § 6. Folgerungen.

Bei Betrachtung der mitgetheilten Zahlen wird man daran denken können, dass die fortschreitende Constitutionsänderung auf den Werth des molecularen Brechungszuwachses Einfluss hat, wenn auch das Beobachtungsmaterial zu einem allgemeinen Schluss nicht hinreicht. Gerade die Substanzen ( $\text{H}_2\text{SO}_4$ ,  $\text{MgSO}_4$ ,  $\text{ZnSO}_4$ ,  $\text{CuSO}_4$ ,  $\text{Na}_2\text{CO}_3$ ,  $\text{C}_4\text{H}_6\text{O}_6$ ), welche eine erhebliche Aenderung von  $\alpha$  innerhalb des Gebietes der benutzten Verdünnungen zeigen, ergeben auch ein stärkeres Wachsen des molecularen Brechungszuwachses; der geringeren Aenderung bei  $\text{HCl}$ ,  $\text{NaCl}$ ,  $\text{C}_2\text{H}_4\text{O}_2$  entspricht eine geringere Aenderung von  $v \Delta n$  und für den Zucker, für dessen Constitution keine Aenderung mit der Verdünnung der Lösung anzunehmen haben, bleibt letzteres wesentlich constant. Dass eine Constitutionsänderung, welche gleiche Aenderungen von  $\alpha$  (Dissociationsgrad) hervorruft, bei verschiedenen Substanzen optisch sehr verschiedenen quantitativen Einfluss haben würde, ist vornherein zu erwarten.

Es ist indess zu bedenken, dass der Gang in den Werth von  $v \Delta n$  eventuell auch auf einem besonderen Verhalten der Dichte der Lösungen beruht.





von  $v \Delta n$  ausreicht, so hätte man einerseits für diese, vielleicht unter Bezugnahme auf die Constitutionsänderungen, eine Erklärung zu suchen; andererseits würde ein solches Ergebniss die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit in Lösungen von den beim Verdünnen eintretenden Constitutionsänderungen erweisen. Die Dichtebestimmungen sind in Angriff genommen.

### § 7. Dispersionsänderung.

Wie § 1 erwähnt, gestattet die Beobachtung der Wanderung der Achromasie auch die Dispersionsdifferenz zwischen Wasser und Lösung zu bestimmen.

Wenn durch Drehen der zweiten Refractorplatte die Phasendifferenz der beiden Lichtbündel für Natriumlicht um  $d$  Wellenlängen geändert wird, so möge die dabei für Licht von der Wellenlänge  $\lambda$  entsprechende Variation  $q d$  heissen. Reicht die angegebene Phasendifferenzänderung  $d$  gerade hin, um bei fortwährender Compensation durch Verstärken der Lösung die Achromasie um einen Streifen weiter rücken zu lassen, so muss der resultirende Gangunterschied um eine Wellenlänge geändert, bez. vermehrt sein, da die Achromasie beim Verstärken der Lösung in unseren Versuchen gleichsinnig mit den Streifen wandert.

Diese Vermehrung ist für alle Farben dieselbe, da das Eintreten der Achromasie gleiche Phasenunterschiede für alle Farben zur Bedingung hat. Wir haben also durch den Refractor  $q d$ , durch Verstärken der Lösung  $-(q d - 1)$  Wellenlängen Phasendifferenz eingeführt.

Sind die Refractorconstanten  $q$  bekannt und  $d$  durch den Versuch ermittelt (vgl. § 4a), so lässt sich die in Wellenlängen gemessene Differenz  $s$  der optischen Längen von Lösung und Wasser für Licht von beliebiger Wellenlänge  $\lambda$  angeben, wenn sie für Natriumlicht ( $s_D$ ) ermittelt ist. Man hat

$$s = \frac{s_D}{d} (q d - 1).$$

Die Differenz  $\Delta n$  der Brechungsexponenten für die Wellenlänge  $\lambda$  ist dann:

$$\Delta n = s \frac{\lambda^1}{D} = \frac{\lambda}{\lambda_D} \frac{(q d - 1)}{d} \Delta n_D.$$

---

1) Vgl. § 1

wir für die zu den Linien  $F$ ,  $D$ ,  $C$  gehörigen Differenzen  
 scheinungen  $\Delta n_F$ ,  $\Delta n_D$ ,  $\Delta n_C$  ein und nennen die Con-  
 q für diese Linien  $f$ , 1 und  $c$ , so ergibt sich der als  
 für die Dispersionsvermehrung dienliche Werth:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta n_F - \Delta n_C}{\Delta n_D} &= \frac{\lambda_F(fd - 1) - \lambda_C(cd - 1)}{\lambda_D(d - 1)} \\ &= \frac{d}{d - 1} \frac{f\lambda_F - c\lambda_C + \lambda_C - \lambda_F}{\lambda_D} - \frac{\lambda_C - \lambda_F}{\lambda_D} \\ &= A_1 \frac{d}{d - 1} - A_2, \end{aligned}$$

und  $A_2$  Constanten des Apparates sind. Dieser Werth  
 den Versuchsergebnissen von der Concentration jeden-  
 r wenig abhängig.

der durch Drehung der zweiten Refractorplatte um  
 Winkel  $\alpha$ , für Licht von der Wellenlänge  $\lambda$ , bei Platten  
 Dicke  $e$  und dem Brechungsexponenten  $n_\lambda$  eingeführte  
 erschied

$$p = \frac{e \alpha}{\lambda \sqrt{n_\lambda^2 - \frac{1}{4}}}$$

erhält man

$$q = \frac{\lambda_D \sqrt{n_D^2 - \frac{1}{4}}}{\lambda \sqrt{n_\lambda^2 - \frac{1}{4}}} = \frac{\lambda_D}{\lambda} \left[ 1 - \frac{n_\lambda - n_D}{n_D - \frac{1}{2n_D}} \right],$$

unter Vernachlässigung von Grössen zweiter Ordnung.  
 Dispersion des Glases ist, wie ersichtlich, von sehr ge-  
 Einflus auf  $q$ . Für die benutzten Refractorplatten  
 aus Glas wurde  $n_F - n_D = 0,0060$  angenommen, was auch  
 mit Angabe des Fabrikanten (Steinheil) entspricht. Daraus

$$c = 0,8995, \quad f = 1,2064.$$

Berechnung der Constanten  $A_1$  und  $A_2$  ergibt dann:

$$\frac{\Delta n_F - \Delta n_C}{\Delta n_D} = 0,2827 \frac{d}{d - 1} - 0,2887.$$

Beispiel für die Bestimmung der Dispersionsänderung  
 dieser Methode mögen die Werthe für  $H^2SO_4$ -Lösungen

dienen. Sei  $\sigma$  die Streifenverschiebung im Natriumlicht für eine Lösung, welche die Achromasie auf den Streifen von der Ordnungsnummer  $z$  fallen lässt, dann erhielt man:

Kleiner Trog	$\left\{ \begin{array}{c} z \\ \sigma \end{array} \right.$	1	2	3	4
( $r = 2$ bis 12)		8,0	19,6	30,3	41,9
Grosser Trog	$\left\{ \begin{array}{c} z \\ \sigma \end{array} \right.$	1	2	4	5
( $v = 70$ bis 600)		5,2	15,3	37,7	48,3

Die einzelnen Werthe von  $\sigma$  sind Ergebnisse je eines Versuches, keine Mittelwerthe.

Die Ausrechnung ergibt für die erste Reihe  $d = 11,2$ , für die zweite  $d = 10,9$ ; die mittleren Fehler sind 0,3 und 0,6 Streifenbreiten. Es folgt dann:

$$\frac{\Delta n_F - \Delta n_C}{\Delta n_D} = 0,0215, \text{ bez. } 0,0225.$$

Die mittleren Fehler dieser Werthe betragen 4 Proc., bez. 8 Proc., eine für derartige Bestimmungen erhebliche Genauigkeit; den angegebenen 8 Proc. entspricht eine Aenderung des Brechungsexponenten um eine Einheit der siebenten Decimale. Eventuell kann die Genauigkeit durch Ausführung mehrerer Versuchsreihen ja noch vergrössert werden.

Während die Verdünnungen im grossen Troge das 24fache von denen im kleinen betragen, bleibt die Dispersionsänderung in den Grenzen der Versuchsfehler dieselbe. Sowohl in diesem Verhalten, als auch in Bezug auf Genauigkeit stimmten die Versuche mit anderen Substanzen mit den besprochenen überein. Die erhaltenen Dispersionsänderungen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

	H <sup>2</sup> SO <sup>4</sup>	H Cl	Zn SO <sup>4</sup>	Mg SO <sup>4</sup>	Na Cl	Zucker	C <sup>2</sup> H <sup>4</sup> O <sup>2</sup>
$\frac{\Delta n_F - \Delta n_C}{\Delta n_D}$	0,0220	0,0450	0,0184	0,0179	0,0368	0,0124	0,0207.

Aus den von Siertsema l. c. gegebenen Werthen für Na Cl berechne ich  $(\Delta n_F - \Delta n_C) / \Delta n_D$  zu 0,0355 also in guter Uebereinstimmung.

Strassburg i. E., Physik. Institut, August 1892.



Wird der Ring parallel zu sich selbst von der Flüssigkeit abgehoben, so wird auf diese ein Zug ausgeübt, dessen Grösse sich mit der Erhebung von der Flüssigkeit ändert. Es lässt sich zeigen, dass er dabei einen Maximalwerth erreicht. Die Grösse des Zuges und die Bedingung des Maximums soll aufgesucht werden.

Durch das Abheben des Ringes entstehen zwei Flüssigkeitsoberflächen, eine innerhalb des Ringes und von diesem begrenzt, die andere an der Aussenseite des Ringes, von der vorausgesetzt werden soll, dass sie sich ins Unendliche erstreckt. Es bezeichne

$R$  den Radius des Ringes,  $\rho$  den des Querschnittes,

$\omega$  den Randwinkel,

$\alpha$  und  $\beta$  die Capillarconstanten an der freien und gemeinsamen Fläche,

$s$  das specifische Gewicht der Flüssigkeit,

$P$  den gesuchten Zug.

Die Flächen sollen auf ein Axensystem bezogen werden, dessen  $Z$ -Axe in die Axe des Ringes, die  $X$ -Axe darauf senkrecht durch die ebenen Flüssigkeitselemente geht und es seien

$z_1$ ,  $r_1$  und  $r_1'$  Ordinate und Krümmungsradien der inneren,

$z_2$ ,  $r_2$  und  $r_2'$  Ordinate und Krümmungsradien der äusseren Fläche,

$\varphi$  der Winkel, welchen ein Radius des kreisförmigen Querschnittes mit der Verticalen bildet,  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  die Werthe von  $\varphi$ , wo die innere und äussere Fläche in den Ring einschneidet.

Denkt man sich dem Ringe eine kleine Verschiebung nach aufwärts  $\delta z$  ertheilt, so dass der Rand unverändert bleibt, so erfahren die Oberflächen Vergrösserungen, die mit  $\delta F_1'$  und  $\delta F_2'$  bezeichnet werden sollen und es ist:

$$\delta F_1' = \int \delta n_1' \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1'} \right) dF_1 + U_1 \sin(\omega + \gamma_1) \delta z$$

$$\delta F_2' = \int \delta n_2' \left( \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2'} \right) dF_2 + U_2 \sin(\omega + \gamma_2) \delta z,$$

wo  $\delta n_1'$  und  $\delta n_2'$  die Verschiebungen bedeuten, welche infolge der Verrückung  $\delta z$  längs den Normalen der entsprechenden

Flächen eintreten,  $U_1$  und  $U_2$  aber die Länge der Contouren der inneren und äusseren Flächen.

Eine zweite mögliche Verrückung ist ein Gleiten der Flächen längs des Ringes, wodurch  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  um  $\delta\gamma_1$  und  $\delta\gamma_2$  verändert werden. Hierdurch sollen die Flächen Vergrößerungen erfahren  $\delta F_1''$  und  $\delta F_2''$  und ist:

$$\delta F_1'' = \int dF_1 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1'} \right) \delta n_1'' + U_1 \rho \cos \omega \delta \gamma_1$$

$$\delta F_2'' = \int dF_2 \left( \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2'} \right) \delta n_2'' + U_2 \rho \cos \omega \delta \gamma_2.$$

Die gemeinsame Fläche von Ring und Flüssigkeit erleidet eine Veränderung

$$\delta G = U_1 \rho \delta \gamma_1 + U_2 \rho \delta \gamma_2.$$

Setzt man

$$\delta F_1 = \delta F_1' + \delta F_1'' \text{ und } \delta F_2 = \delta F_2' + \delta F_2''$$

$$\delta n_1 = \delta n_1' + \delta n_1'' \quad \delta n_2 = \delta n_2' + \delta n_2'',$$

so kann die capillare Arbeit geschrieben werden:

$$- \alpha (\delta F_1 + \delta F_2) - \beta \delta G,$$

die Arbeit der Schwere:

$$- s \int z_1 \delta n_1 dF_1 - s \int z_2 \delta n_2 dF_2 - s \int z \delta n dG,$$

wo  $z$  die Ordinate und  $\delta n$  die Verschiebung längs der Normalen der gemeinsamen Fläche ist. Dabei ist  $\delta n = \cos \varphi \delta z$ .

Berücksichtigt man noch das Gewicht  $M$  des Ringes und den auf ihn ausgeübten Zug  $P$ , deren Arbeit  $-M\delta z$  und  $P\delta z$  sind, so folgt aus dem Princip der virtuellen Geschwindigkeit als Gleichgewichtsbedingung:

$$\begin{aligned} & - \alpha \int \delta n_1 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1'} \right) dF_1 - \alpha \int \delta n_2 \left( \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2'} \right) dF_2 \\ & - \alpha U_1 \sin(\omega + \gamma_1) \delta z - \alpha U_2 \sin(\omega + \gamma_2) \delta z - \alpha U_1 \rho \cos \omega \delta \gamma_1 \\ & - \alpha U_2 \rho \cos \omega \delta \gamma_2 - \beta U_1 \rho \delta \gamma_1 - \beta U_2 \rho \delta \gamma_2 - s \int z_1 \delta n_1 dF_1 \\ & - s \int z_2 \delta n_2 dF_2 - \delta z s \int z \cos \varphi dG - M \delta z + P \delta z = 0, \end{aligned}$$

woraus in bekannter Weise folgt:

$$1) \quad s z_1 = - \alpha \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1'} \right) \quad s z_2 = - \alpha \left( \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2'} \right),$$

$$2) \quad P = M + \alpha U_1 \sin(\omega + \gamma_1) + \alpha U_2 \sin(\omega + \gamma_2) + s \int z \cos \varphi dG.$$

Für alle Punkte von  $G$  hat man:

$$z = k + \varrho (1 - \cos \varphi),$$

wo  $k$  die Ordinate des tiefsten Punktes des Ringes bezeichne  
Ferner ist:

$$dG = 2\pi [R + \varrho \sin \varphi] \varrho d\varphi.$$

Die Integration im letzten Gliede von (2) ist auszudehnen von 0 bis  $\gamma_1$  und von 0 bis  $\gamma_2$  und ergibt mit Vernachlässigung des sehr kleinen Gliedes mit  $\varrho^3$ :

$$U\varrho sk(\sin \gamma_1 + \sin \gamma_2) + \frac{U\varrho^3 s}{2} [\sin \gamma_1 (2 - \cos \gamma_1) - \gamma_1 + \sin \gamma_2 (2 - \cos \gamma_2) - \gamma_2].$$

Hierbei ist

$$U = 2\pi R,$$

dagegen:

$$U_1 = 2\pi (R - \varrho \sin \gamma_1) \text{ und } U_2 = 2\pi (R + \varrho \sin \gamma_2).$$

Setzt man letztere Werthe in (2) ein, so erhält man:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} P &= M + \alpha \cdot 2\pi [R(\sin \omega + \gamma_1 + \sin \omega + \gamma_2) \\ &\quad + \varrho (\sin \gamma_2 \sin \omega + \gamma_2 - \sin \gamma_1 \sin \omega + \gamma_1)] \\ &\quad + U\varrho sk(\sin \gamma_1 + \sin \gamma_2) + \frac{U\varrho^3 s}{2} [\sin \gamma_1 (2 - \cos \gamma_1) - \gamma_1 \\ &\quad + \sin \gamma_2 (2 - \cos \gamma_2) - \gamma_2]. \end{aligned} \right.$$

Wenn  $\bar{z}_1$  und  $\bar{z}_2$  die Ordinaten der höchsten Punkte der inneren und äusseren Fläche sind, so würde für einen Ring von unendlich grossem Radius

$$\bar{z}_1 = \bar{z}_2 = \bar{z}$$

und ebenso

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma.$$

Durch die endliche Krümmung des Ringes aber wird bewirkt, dass

$$\bar{z}_1 > \bar{z} > \bar{z}_2$$

$$\gamma_1 > \gamma > \gamma_2.$$

Dabei sind  $\bar{z}_1$ ,  $\bar{z}_2$  und  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  Functionen von  $R$ .

Denkt man sich nun ein Stück des Ringes herausgeschnitten und im entgegengesetzten Sinne gebogen, sodass  $+R$  übergeht in  $-R$ , während alles andere unverändert bleibt, so wird auch  $\bar{z}_1$  in  $\bar{z}_2$ ,  $\gamma_1$  in  $\gamma_2$  übergehen.



Ist daher  $\bar{z}_1 = \varphi(R)$ , so ist  $\bar{z}_2 = \varphi(-R)$

$$\gamma_1 = \psi(R) \quad \gamma_2 = \psi(-R).$$

Es soll nun vorausgesetzt werden, dass  $R$  so gross gegen  $\rho$  genommen wird, dass Glieder mit  $\rho/R$  und höheren als der ersten Potenz von  $1/R$  vernachlässigt werden können gegen die mit  $1/R$ .

Setzt man dann  $1/R = \mu$  und entwickelt nach Potenzen von  $\mu$ , so erhält man:

$$z_1 = \varphi(0) + \mu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right)_0 \quad \gamma_1 = \psi(0) + \mu \left( \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right)_0$$

$$\bar{z}_2 = \varphi(0) - \mu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right)_0 \quad \gamma_2 = \psi(0) - \mu \left( \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right)_0$$

$$z_1 + z_2 = 2\varphi(0) = 2\bar{z} \quad \text{wo } \psi(0) = \gamma.$$

Irgend eine Function von  $\gamma_1$  kann dann geschrieben werden:

$$(4) \quad \begin{cases} F(\gamma_1) = F(\gamma) + \mu \frac{\partial F}{\partial \gamma} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right)_0 \text{ und ebenso} \\ F(\gamma_2) = F(\gamma) - \mu \frac{\partial F}{\partial \gamma} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right)_0. \end{cases}$$

Wenn man diese Ausdrücke auf (3) anwendet, so vereinfacht sich diese Gleichung zu:

$$(I) \quad \begin{cases} P = M + 2\alpha U \sin(\omega + \gamma) + 2U\rho s k \sin \gamma \\ \quad + U\rho^2 s [\sin \gamma (2 - \cos \gamma) - \gamma]. \end{cases}$$

Aus der Figur folgt nun:

$$\bar{z}_1 = k + \rho(1 - \cos \gamma_1) \quad \bar{z}_2 = k + \rho(1 - \cos \gamma_2)$$

$$2\bar{z} = z_1 + z_2 = 2k + \rho[2 - (\cos \gamma_1 + \cos \gamma_2)].$$

Dies geht durch (4) über in:

$$\bar{z} = k + \rho(1 - \cos \gamma).$$

$\bar{z}$  aber ist Steighöhe an einem Ringe von  $\infty$  grossem Radius, daher bekanntlich gegeben durch:

$$(II) \quad \bar{z} = \sqrt{\frac{2\alpha}{s}} \sqrt{1 + \cos(\omega + \gamma)},$$

so dass man hat:

$$(III) \quad k = \sqrt{\frac{2\alpha}{s}} \sqrt{1 + \cos(\omega + \gamma)} - \rho(1 - \cos \gamma).$$

Durch (I) ist  $P$  für alle Werthe von  $k$  gegeben; der grösste Werth von  $P$  wird bestimmt sein durch

$$(III) \quad \frac{dP}{dk} = 0.$$

Beobachtet man daher das Maximum von  $P$  und den zugehörigen Werth von  $k$ , so sind durch die drei Gleichungen (I), (II), (III) die drei Unbekannten  $\alpha$ ,  $\omega$ ,  $\gamma$  bestimmt.

#### Versuchsanordnung.

§ 3. Bei Ausführung dieser Methode ist es höchst wesentlich, dass der Ring genau horizontal gestellt und ebenso abgehoben wird, dass ferner der Zug ganz stetig und ohne jede Erschütterung vergrössert wird. Anfänglich versuchte ich es, den Ring an eine Waage zu hängen und das scheinbare Gewicht desselben zu bestimmen. Es zeigte sich aber, dass bei dieser Anordnung die Voraussetzungen der Rechnung nicht zu erfüllen waren. Dies gelang erst, als nach Angabe des Hrn. Prof. Braun der *Ring festgestellt* und die Schale, welche die Flüssigkeit enthielt, in die Waagevorrichtung gebracht wurde (Fig. 2).

Statt der Waage wurde eine horizontal durch die ganze Länge des Zimmers gespannte Spirale benutzt. Nach vielen Versuchen erwies sich eine aus 0,2 mm dickem Klavierstahldraht 3 mm weit gewundene Spirale am geeignetsten.

In der Mitte trug die Spirale ein Häkchen zur Aufnahme eines Gehänges, in welches die weite Nickelschale gestellt werden konnte. Das Gehänge war ferner zur Erleichterung der Beobachtungen mit einem in Vaselineöl tauchenden Dämpfer und einem Waagschälchen versehen, in welches ein passendes Gewicht gelegt wurde. Der Ring war in folgender Weise befestigt:

An einer durchlochten Messingscheibe befanden sich drei Zinken, an deren Enden der Ring so angelöthet wurde, dass alle seine Theile genau in einer Ebene lagen. Die Messingscheibe war durch ein Kugelgelenk mit einem Stiel verbunden; dieser wurde an einen verticalen Träger geschraubt, welcher in Führungen durch eine Mikrometerschraube gehoben und gesenkt werden konnte.







$$\bar{p} = \frac{s a^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2} \right) + b a s \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{b}{a} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2} \right) \right]$$

$$\bar{p} = \alpha + b \sqrt{2 \alpha s} + \frac{1}{4} b^2 s.$$

Diese Gleichung ist nach  $\alpha$  aufzulösen. Es genügt aber vollständig  $\alpha$  nach steigenden Potenzen von  $b$  zu entwickeln und die drei ersten Glieder beizubehalten. Man erhält so:

$$(VI) \quad \alpha = \bar{p} - b \sqrt{2 \bar{p} s} + \frac{3 b^2 s}{4}.$$

#### Beispiele für die Ringmethode.

§ 7. Als Beispiele für diese Methode habe ich die Oberflächenspannung von Wasser und Glycerin bestimmt.

Der Ring war aus einem Nickelblech gefertigt, welches an einer Seite ziemlich dünn abgedreht wurde.

Messung mit dem Mikroskop ergab die mittlere Dicke  $2b = 0,2275$  mm.

Der äussere Durchmesser des Ringes  $2(R + b)$  wurde mit dem Kathetometer bestimmt, im Mittel zu 77,2250 also  $2R = 76,9975$  mm.

Folgende Zahlen geben die Versuchsergebnisse:

*Wasser:*  $P = 3,787, 3,779, 3,779, 3,779, 3,779.$

Mittel:  $3,7806$  g  $s = 1.00$

$\alpha = 7,376$  [mg Gew. / mm].

*Glycerin:*  $P = 3,448, 3,435, 3,448, 3,435, 3,4376.$

Mittel:  $3,4407$  g  $s = 1,22$

$\alpha = 6,650$  [mg Gew. / mm].

#### II. Theil. Methode des Maximaldruckes in kleinen Tropfen und Blasen.

Bedingungen an einer scharfen Kante.

§ 8. Aus den im § 6 mitgetheilten Erfahrungen darf man folgern, dass der Randwinkel von Metallen gegen Electrolyte im allgemeinen 0 sein dürfte und man kann daher nicht von ihm auf die Capillarconstante an der gemeinsamen Fläche schliessen. Da es mir nun um einen Vergleich zu thun war zwischen dieser Constante und der an derselben Fläche auftretenden Potentialdifferenz, sehr verdünnte Amalgame aber sich galvanisch<sup>1)</sup> wesentlich wie die gelösten Metalle verhalten,

1) Braun, Wied. Ann. 41. p. 449. 1890.



Bei einer Flüssigkeit, welche mit Glas einen spitzen Randwinkel bildet, wäre dagegen die Anordnung  $b$  von diesem unabhängig.

§ 9. Ehe ich dazu übergehe den Maximaldruck zu berechnen, soll die mathematische Aufgabe um deren Lösung es sich hierbei handelt allgemein formulirt werden.

Es sei eine Differentialgleichung erster Ordnung gegeben:

$$(1) \quad f(x y y' p) = 0,$$

wo  $p$  einen constanten Coefficienten bedeutet. Das Integral sei

$$(2) \quad F(x y p c) = 0.$$

Zur Bestimmung der willkürlichen Constanten  $c$  muss noch eine Bedingung gegeben sein. Gewöhnlich die, dass die Curve durch einen gegebenen Punkt  $x_1 y_1$  gehen soll, welche man schreiben kann

$$(3) \quad F(x_1 y_1 p c) = 0.$$

Hat nun  $p$  einen vorgegebenen Werth, so ist durch (3)  $c$  bestimmt. Allgemein aber kann  $p$  auch als ein veränderlicher Parameter gedacht werden, dann erscheint durch (3)  $p$  als Function von  $c$ .

Führt man nun die Bedingung ein:  $c$  so zu bestimmen, dass  $p$  ein Maximum wird, so hat man (3) unter Rücksicht auf diese Abhängigkeit zu differenziren,  $dp/dc = 0$  zu setzen, und aus der so entstandenen und der Gleichung (3)  $c$  zu eliminiren. Dies gibt

$$\frac{\partial F}{\partial p} \frac{dp}{dc} + \frac{\partial F}{\partial c} = 0 \text{ und wegen } \frac{dp}{dc} = 0.$$

$$(4) \quad \frac{\partial F}{\partial c} = 0.$$

Das verlangte Eliminationsresultat:

$$Disc_c F(x_1 y_1 p c) = 0$$

würde den maximalen Werth von  $p$  ergeben.

Genau dasselbe Resultat würde man erhalten, wenn man die *singuläre Lösung* der Differentialgleichung (1) suchen und in diese die Coordinaten des gegebenen Punktes einsetzen würde.

Man sieht, dass ganz allgemein der singulären Lösung die verlangte Maximaleigenschaft zukommt.





$\beta$  die Capillarconstante an der gemeinsamen Fläche Quecksilber | Flüssigkeit;

$P$  der Druck über der weiten Quecksilberfläche;

$Q$  der Druck über der Flüssigkeit;

so ist die Gleichgewichtsbedingung:

$$Q + h' s' - y s' + \beta \left( \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} \right) + y s + h s = P.$$

Setzt man

$$p = P - Q - (h s + h' s')$$

$$\sigma = s - s',$$

so wird

$$(1) \quad p = \sigma y + \beta \left( \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} \right).$$

Es ist nun das Maximum von  $P - Q$  oder was dasselbe ist, von  $p$  zu bestimmen. Durch die Substitution

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \vartheta$$

geht (1) bekanntlich über in

$$(2) \quad p = \sigma y + \frac{\beta}{x} \frac{d}{dx} (x \sin \vartheta),$$

$p$  ist nach dieser Gleichung zusammengesetzt aus dem hydrostatischen Druck  $\sigma y$  und dem capillaren, welcher durch das zweite Glied angegeben wird. In allen im Folgenden beobachteten Fällen ist das erste Glied sehr klein gegen das zweite. Es wird daher nur ein kleiner Fehler begangen werden, wenn man in dem ersten Gliede  $y$  ersetzt durch die Ordinate einer Kugel, welche die Röhrenwand an derselben Stelle und unter demselben Winkel trifft, wie die capillare Fläche.

Sei  $\eta$  die Ordinate des Mittelpunktes dieser Kugel,  $r$  deren Radius, so wird im ersten Gliede von (2) gesetzt:

$$y = \eta \pm \sqrt{r^2 - x^2}.$$

wo das obere Zeichen für Punkte oberhalb, das untere Zeichen für Punkte unterhalb des Kugelmittelpunktes gilt.

Dies in (2) eingesetzt und integriert gibt:

$$p \frac{x^2}{2} = \sigma \left[ \eta \frac{x^2}{2} \mp \frac{(r^2 - x^2)^{3/2}}{3} \right] + \beta x \sin \vartheta + \text{Const.}$$

für  $x = 0$  wird

$$\text{Const.} = \frac{\sigma r^3}{3}.$$

Ist  $a$  der Radius der Capillare, so ist

$$3) \quad \eta = \frac{a}{\operatorname{tg} \vartheta_1} \quad \text{und} \quad r = \frac{a}{\sin \vartheta_1},$$

10  $\vartheta_1$  der Werth von  $\vartheta$  für  $x = a$ ,  $y = 0$ .

Für  $x = a$  erhält man hieraus nach einigen Umformungen

$$1) \quad p = \frac{2\beta}{a} \sin \vartheta_1 + \frac{\sigma a}{3 \sin \vartheta_1} \left( \cos \vartheta_1 + \frac{2}{1 - \cos \vartheta_1} \right).$$

Soll nun  $p$  ein Maximum werden, so muss

$$\frac{dp}{d\vartheta_1} = 0$$

werden, welches zur Bedingung führt:

$$i) \quad 0 = \frac{2\beta}{a} \cos \vartheta_1 - \frac{\sigma a}{3(1 - \cos \vartheta_1)^2}.$$

Bezeichnet  $\bar{p}$  den Maximalwerth von  $p$ , so erhält man durch Elimination von  $\beta$  aus (4) und (5)

$$\bar{p} = \frac{\sigma a \sin \vartheta_1}{3 \cos \vartheta_1 (1 - \cos \vartheta_1)^2} + \frac{\sigma a}{3 \sin \vartheta_1} \left( \cos \vartheta_1 + \frac{2}{1 - \cos \vartheta_1} \right).$$

Da nun  $r$  jedenfalls nicht sehr von  $a$  verschieden ist, so kann nach (3) auch  $\vartheta_1$  nicht viel von  $90^\circ$  abweichen.

Setzt man  $\vartheta_1 = 90 - \varepsilon$ , so zeigt die ziffernmässige Berechnung, dass es völlig ausreicht, blos die erste Potenz von  $\varepsilon$  beizubehalten. Man erhält so aus der letzten Gleichung:

$$j) \quad \varepsilon = \frac{\sigma a}{3\bar{p} - 2\sigma a}$$

und aus (4)

$$p = \frac{2\beta}{a} + \frac{\sigma a}{3} (2 + 3\varepsilon).$$

substituiert man hier  $\varepsilon$  aus (6), so wird

$$\bar{p} = \frac{2\beta}{a} + \frac{\sigma a}{3} \left[ 2 + \frac{\sigma a}{\bar{p} - \frac{2}{3}\sigma a} \right].$$

sofür man ohne weiteres setzen kann:

$$\bar{p} = \frac{2\beta}{a} + \frac{\sigma a}{3} \left[ 2 + \frac{\sigma a}{\bar{p}} \right].$$

Setzt man endlich zur Abkürzung  $\sigma a / \bar{p} = m$  so erhält man

$$k) \quad \beta = \frac{a\bar{p}}{2} \left[ 1 - \frac{2m}{3} - \frac{m^2}{3} \right].$$

Diese Gleichung gestattet  $\beta$  zu berechnen, wenn das Maximum  $p$  bez.  $P - Q$  beobachtet wird.

## Experimentelles.

§ 11. Bei Ausführung dieser Methode war es wünschenswerth, die Anordnung so zu treffen, dass der hydrostatische Druck möglichst klein und immer bequem wieder auf denselben Werth zu bringen war. Ersteres um genauere Bestimmungen des specifischen Gewichts, letzteres um bei Wiederholung der Versuche neue Niveaumessungen zu ersparen.

Der in Fig. 5 gezeichnete Apparat genügt diesen Anforderungen.

Die Capillare wird mittels eines Korkes in das untere Ende einer weiten Glasröhre eingepasst. Am oberen Ende trägt letztere einen Schlauchansatz und einen Hals, durch welchen ein in Glasröhrchen eingeschmolzener Platindraht isolirt bis an den Boden der weiten Röhre geführt werden kann. Seitlich ist ein mit Hahn versehenes Rohr angesetzt. Der Apparat wurde in eine weite Schale getaucht und in diese soviel Quecksilber gefüllt, dass das seitliche Rohr unter den Spiegel desselben zu liegen kam, dann so an einem Stativ befestigt, dass das obere ganz eben abgesprengte Ende der Capillare horizontal war. Ein Schlauch verband die weiten Glasröhren einerseits mit einem Aspirator, andererseits mit einem U-Rohr, welches mit Wasser gefüllt als Manometer diente. Sollte nun die Oberflächenspannung ermittelt werden, so wurde der Hahn geschlossen, durch den Aspirator der Raum über der Capillare langsam evacuirt und die im Manometer ersichtliche Druckänderung mit einem Kathetometer verfolgt. Die Druckdifferenz  $P - Q$  wird dann durch die Höhendifferenz im Manometer gemessen. Wenn durch Austropfen von Quecksilber aus der Capillare das äussere Niveau geändert wurde, so konnte durch Oeffnen des Hahnes der Anfangszustand leicht wieder hergestellt und der Versuch wiederholt werden. Sollte die Capillarconstante gegen eine Flüssigkeit untersucht werden, so brauchte diese blos in das Glasrohr eingefüllt zu werden. Um den Einfluss der Polarisation auf die Capillarconstante zu beobachten, wurde das Quecksilber in der weiten Schale und durch den in die Glasröhre führenden Platindraht auch das innerhalb befindliche Quecksilber mit den Abzweigungen eines Accumulators verbunden. Schliesslich konnte natürlich auch der Temperatur-







	<i>H</i>	<i>S</i>	<i>h</i>	<i>h'</i>	<i>s</i>	<i>s</i>	$\beta \left[ \frac{\text{mg Gew.}}{\text{mm}} \right]$
Quecksilber-Benzol bei 20° C.	169,70	0,99859	0,90	11,40	13,5461	0,88	34,83
Quecksilber-Benzol bei 72° C.	141,05	0,99859	0,70	12,40	13,420	0,82	28,45
Quecksilber-Amylalk. bei 25° C.	147,95	0,997120	1,90	10,50	13,5339	0,80	26,67

NB. Bei höherer Temperatur trübte sich der Amylalkohol ich theile daher die gefundenen Zahlen nicht mit.

Die Capillarconstante des *Quecksilbers gegen 5 Proc Schwefelsäure* wurde bei verschiedenen Stufen der Polarisati beobachtet. Die Quecksilberkuppe wurde nur kathodisch po larisirt. Die Potentialdifferenz (in Volt) des polarisirenden Stromes ist mit *V* bezeichnet.

	<i>V</i>	<i>H</i>	<i>S</i>	<i>h</i>	<i>h'</i>	<i>s</i>	<i>s'</i>	$\beta \left[ \frac{\text{mg Gew.}}{\text{mm}} \right]$
Versuch I bei 21° C.	0	174,10	0,98047	1,30	17,60	13,5437	1,03	32,57
	0,2	192,55	0,98047	1,30	17,60	13,5437	1,03	37,28
	0,4	204,35	0,98047	1,30	17,60	13,5437	1,03	39,92
	0,8	216,90	0,98047	1,30	17,60	13,5437	1,03	43,108
	1,0	214,80	0,98047	1,30	17,60	13,5437	1,03	42,51
Versuch II bei 20,75° C.	0	169,95	0,99815	19,50	19,50	13,5449	1,03	32,41
	0,8	211,45	0,99815	19,50	19,50	13,5449	1,03	42,49
	0,9	212,70	0,99815	19,50	19,50	13,5449	1,03	42,89
Versuch III bei 75° C.	0	163,65	0,99815	0,55	20,75	13,4125	1,004	31,63
	0,8	204,40	0,99815	0,55	20,75	13,4125	1,004	41,44
	0,9	206,40	0,99815	0,55	20,75	13,4125	1,004	41,92
	1,0	204,65	0,99815	0,55	20,75	13,4125	1,004	41,51

Das Maximum ist hiernach übereinstimmend mit den Ver suchen anderer Beobachter bei etwa 0,9 Volt gelegen.

Auffallend scheint es mir, dass ein Einfluss der Temperatur auf die Capillaritätsconstante fast gar nicht zu bemerken ist

III. Theil. Beziehungen der Capillaritätsconstante zu anderer Grössen.

§ 15. Theoretische Ueberlegungen haben mich zu den Schlusse geführt, dass zwischen der Capillaritätsconstante *a* der gemeinsamen Fläche zweier Flüssigkeiten und der *a* dieser Fläche auftretenden Potentialdifferenz eine Beziehung bestehen sollte.





Gewichtes das letzte Glied vernachlässigen dürfen, insbesondere wenn recht enge Röhren angewendet werden, wodurch auch die Genauigkeit der Beobachtung grösser wird.

Die Tabelle gibt die gefundenen Zahlen.  $\epsilon$  bezeichnet den Temperaturcoefficienten.

Der Radius der Capillare war bei diesen Versuchen  $a = 0,530$ .

				$H$	$S$	$h$	$s$	$\alpha \left[ \frac{\text{mg Gew.}}{\text{mm}} \right]$	$\epsilon$
Wasser	I.	19°	C.	32,10	0,99846	2,86	0,99846	7,64	} 0,0021
„	II.	20°	„	38,78	0,998259	9,65	0,998259	7,63	
„	III.	70°	„	35,54	0,998259	9,65	0,97794	6,83	
Amylalkohol		21°	„	10,90	0,998047	1,542	0,810	2,38	} 0,0029
„		75°	„	9,05	0,998047	1,542	0,770	2,00	
Benzol		22,5°	„	13,00	0,9980715	1,542	0,880	2,995	} 0,0039
„		72,5°	„	10,65	0,9980715	1,542	0,830	2,408	

§ 17. Was die Abhängigkeit der Oberflächenspannung von der Temperatur betrifft, so haben wohl die diesbezüglichen Untersuchungen zumeist dahin geführt, die Oberflächenspannung als lineare Function der Temperatur darzustellen. Die mechanische Wärmetheorie gestattet nun zu beurtheilen, inwiefern eine solche Annahme begründet sei.

Setzt man in bekannter Weise<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} dQ &= c d\vartheta + b dO \\ dA &= -\alpha dO, \end{aligned}$$

wo  $dQ$  und  $dA$  das Element der Wärme und der Arbeit,  $\vartheta$  die absolute Temperatur,  $O$  die Oberfläche,  $\alpha$  die Capillarconstante und  $c$  die Wärmecapacität (bei constanter Oberfläche) der Flüssigkeit bedeuten, so erhält man:

$$\frac{\partial c}{\partial O} = -\vartheta \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \vartheta^2}.$$

Wenn nun die Wärmecapacität der Flüssigkeit von der Grösse der Oberfläche unabhängig ist, so folgt hieraus:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \vartheta^2} = 0,$$

also  $\alpha$  lineare Function von  $\vartheta$ .

1) Stefan, Wied. Ann. 38. p. 427. 1889.



Da nun für  $r = 0$   $f(r)$  endlich, für den endlichen Werth  $r = a$  aber 0 wird, so erhält man:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d\alpha}{d\vartheta} = -7k^2 v \int_0^a r f(r) dr,$$

oder:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{d\vartheta} = -7v.$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{d\vartheta}$$

ist aber der Temperaturcoefficient  $\varepsilon$  der Oberflächenspannung, also wird

$$\varepsilon = -\frac{7}{3}\gamma,$$

d. h. der Temperaturcoefficient der Oberflächenspannung ist 2,33 mal so gross als der Ausdehnungscoefficient einer Flüssigkeit.

Um diese Relation eingehend zu prüfen, wäre eine grössere Anzahl verlässlicher Bestimmungen der Temperaturcoefficienten erforderlich.

Die älteren Angaben über diese Grösse sind aber meist nach Methoden ermittelt, welche willkürliche Annahmen über den Randwinkel enthalten. Davon frei sind die Werthe, welche Hr. Timberg<sup>1)</sup> nach der Blasenmethode bestimmt hat. Auch aus den Beobachtungen, welche Hr. Jäger<sup>2)</sup> gemacht hat, lassen sich diese Coefficienten ermitteln, doch bedürfen die Zahlen des Hrn. Jäger einer Correctur, weil seine Annahme, dass die von ihm mit  $\beta$  bezeichnete Grösse eine Constante sei, keineswegs zutrifft. Es ergibt sich dies aus den hier abgeleiteten Formeln als auch aus den Angaben des Hrn. Jäger selbst. Aus seinen und den Beobachtungen Brunner's für Aether und Wasser von 20° C. berechnet nämlich Hr. Jäger  $\beta = 0,1882$ . Legt man aber der Berechnung andere Paare von Beobachtungen zu Grunde, so erhält man für  $\beta$  ganz andere Werthe. Zwar hat eine Aenderung in  $\beta$  keinen grossen Einfluss auf die Grösse von  $\alpha$ , aber die Temperaturcoefficienten können dadurch schon erheblich verändert werden. Ich habe daher die Beobachtungen des Hrn. Jäger mit Hülfe der Formel (7) neu berechnet.

1) Timberg, Wied. Ann. 30. p. 545. 1887.

2) Jäger, Wien. Ber. 100. Abth. Ia.



#### IV. *Zur Chemie des Accumulators;* *von Mathias Cantor.*

---

Im 38. Bande von W. A. p. 341 hatte Hr. Streintz verschiedene Erscheinungen im Accumulator durch die Annahme erklärt, dass das Pb Wasserstoff occludirt. Er hatte diese Annahme auf die Thatsache gestützt, dass electrolytisch reducirtes Pb in Berührung mit verdünnter  $\text{H}_2\text{SO}_4$  Wasserstoff entwickelt. Hr. Streintz war hierbei zu dem Schlusse gekommen, dass das Pb das 57fache seines Volumens Wasserstoff occludirt.

Dagegen hatte ich <sup>1)</sup>, zu zeigen versucht, dass das Pb im Accumulator keinen H occludirt und dass die von Hrn. Streintz beobachtete H-Entwicklung herrührt von der chemischen Action:



Dieser Nachweis wird von den Hrn. Neumann und Streintz <sup>2)</sup> angezweifelt. Es wird zwar zugegeben, dass das von mir angewandte Verfahren zu brauchbaren Resultaten hätte führen müssen, doch soll ich bei der Anwendung „einige“ Fehler begangen haben. Statt solcher aber werden nur zwei Bedenken geltend gemacht, deren Bedeutungslosigkeit sofort einzusehen ist:

1. Dadurch, dass ich den Zellinhalt in eine Pipette saugte wäre die Bleikathode in Berührung mit Luft gekommen und der occludirte H verbrannt.

Durch das Aufsaugen ist aber die Kathode *natürlich nicht* mit Luft, sondern mit der über ihr befindlichen H-Atmosphäre in Berührung gekommen, welche durch die stundenlange Electrolyse von Sauerstoff befreit war.

2. Meinen die Hrn. Neumann und Streintz, dass der Pb-Schwamm nur schwer von der aufgesaugten  $\text{H}_2\text{SO}_4$  zu befreien ist. Nun habe ich aber gar nicht behauptet, dass das

---

1) Cantor, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. in Wien 99. II. 1890.

2) Neumann u. Streintz, Wied. Ann. 46. p. 431. 1892.

Auswaschen des Bleischwammes leicht und nur wenig Waschwasser nöthig sei, wohl aber durch meinen Controlversuch bewiesen, dass es mit jener Genauigkeit, welche eine quantitative Analyse überhaupt zulässt, geleistet werden kann. Dass es Sorgfalt und Geduld erfordert, habe ich überflüssig gehalten zu erwähnen.

Die Hrn. Neumann und Streintz finden nun nach ihrer ersten Methode „nur eine minimale“, nach ihrer zweiten Methode aber eine H-Aufnahme, welche 0,11—0,15 des Pb Volumens beträgt. Zwischen diesen Angaben und der meinen, dass *keine* Aufnahme stattfindet, wird man wohl kaum einen wesentlichen Unterschied finden und schwerlich geneigt sein, der angeblichen H-Occlusion irgend welche Bedeutung für die Chemie des Accumulators — und auf die kam es wesentlich an — zuzuschreiben.

Tübingen, Physik. Institut, Juli 1892.

---

## V. Ueber das Entladungspotentialgefälle; von O. Lehmann.

(Hierzu Taf. VI Fig. 8—14.)

Die genaue Messung des Entladungspotentialgefälles stösst bekanntlich auf grosse Schwierigkeiten. Um deren Ursachen kennen zu lernen, habe ich verschiedene Versuche, besonders bei verdünnten Gasen, ausgeführt, welche in Ergänzung früherer Mittheilungen <sup>1)</sup> über diesen Gegenstand nachfolgend kurz beschrieben werden sollen.

### A. Elektrodenlose Röhren in variablem elektrischem Feld.<sup>2)</sup>

Durch die Wand des Zimmers ist gut isolirt von dem nicht abgeleiteten Conductor einer Influenzmaschine aus eine

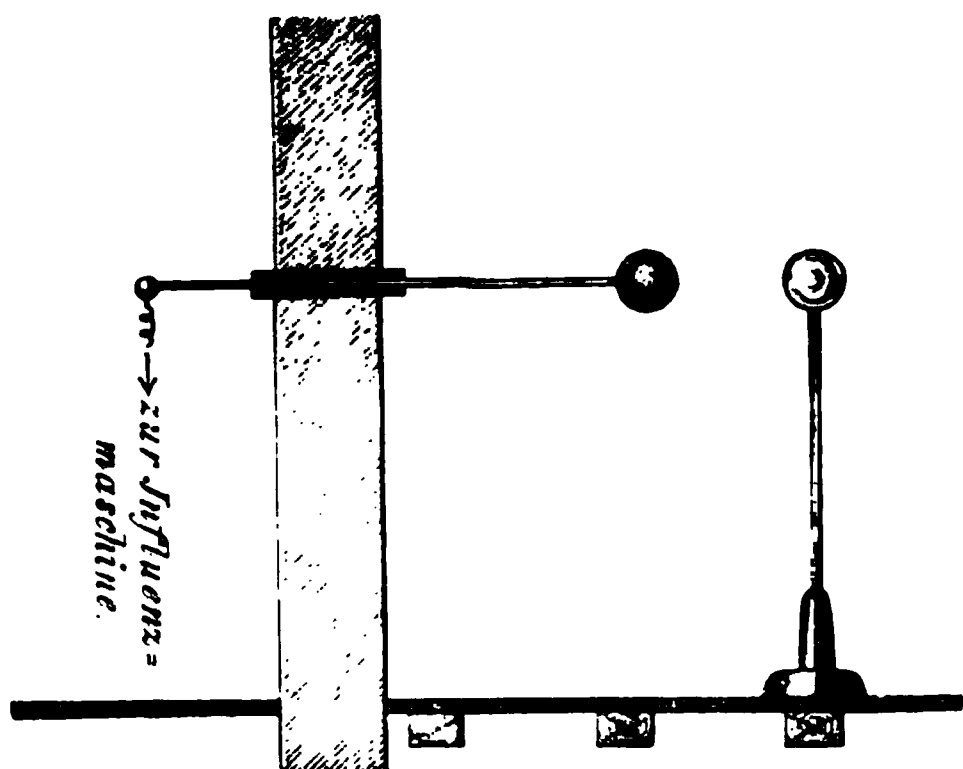


Fig. 1.

dünne Leitung zu einem ringsum freien kugelförmigen Conductor geführt, in dessen Nähe, gleichfalls gut isolirt, eine evacuirte Glaskugel oder Röhre aufgestellt ist. Der Conductor erzeugt ringsum sich ein elektrisches Feld von einfacher Beschaffenheit, sodass es leicht

ist das Gefälle des Potentials im Innern der Glaskugel zu berechnen. Man sollte meinen, dass sich so durch successive Steigerung der Spannung sehr bequem ermitteln liesse, bei welchem Potentialgefälle in der Glaskugel Entladung eintritt. Thatsächlich stösst man aber auf eine Reihe von Schwierigkeiten.

1) Zusammengestellt in: O. Lehmann, Molecularphysik, Leipzig. W. Engelmann. 2. p. 220 u. ff., 476 u. ff. 1889.

2) O. Lehmann, Wied. Annalen. 22. p. 333 und 341, 1884 und l. c. p. 231.





angehäuft wird, welche schliesslich unter Bildung eines kleinen elektrischen Büschels entweicht, somit die gebundene Elektrizität im Innern frei gibt, dadurch momentane Erhöhung der Spannung erzeugt, und so die Entladung auslöst.

Besonders auffällig zeigte sich diese Leitung durch die Glaswand bei einer 3,1 m langen, 43 mm weiten in der Mitte verengten Röhre mit äusseren Belegungen, als dieselbe direct mit den Polen einer Batterie von 1060 kleinen Accumulatoren <sup>1)</sup> verbunden wurde. Sie leuchtete in regelmässigen, etwa eine Secunde dauernden Intervallen hell auf, wobei sich der Uebergang der äusseren Influenzelektrizität auf die nur lose aufliegenden Stanniolbelegungen jeweils durch ein lautes knackendes Geräusch bemerklich machte.

Aus gleichem Grunde beobachtete man beim dauernden Kurzschliessen der Belege des *geladenen* Vacuumrohres je nach den Umständen mehr oder minder lang anhaltendes pulsirendes Nachleuchten, indem ganz wie bei einer entladenen Leydener Flasche der sogenannte Rückstand nach und nach zum Vorschein kam.<sup>2</sup> Es genügt sogar schon eine isolirte, evacuirte Glaskugel an einen geladenen Conduktor zu bringen und dann die geladene Stelle mit der Hand zu berühren, um Nachleuchten zu erhalten. Selbst ohne alle Berührung tritt letzteres bis zu gewissem Grade ein, vermuthlich in Folge Zerstreuung der Elektrizität durch die isolirenden Stützen.

Da alles Glas mehr oder weniger leitet, dürfte sich diese Schwierigkeit hinsichtlich der Bestimmung des Entladungsgefälles nicht beseitigen lassen, man ist also darauf angewiesen bei *sinkender* Spannung zu beobachten, da sich nur dann die Potentialänderung so rasch vollziehen lässt, dass die langsame Influenz im Glase ausser Betracht kommt.

#### c) Das Versagen der Röhren.

Wie ich schon früher bemerkte <sup>3)</sup> und wie auch verschiedene neuere Arbeiten von J. J. Thomson, Voller, E. Wiedemann und Ebert u. A. gezeigt haben, versagen neu hergestellte Röhren zuweilen völlig und es ist nöthig, um sie

---

1) Von Prof. H. Hertz zur Zeit seiner hiesigen Versuche construirt.

2) l. c. p. 341.

3) l. c. p. 341.



bringe man ein zweites Elektrometer in solche Entfernung vom Conduktor, dass es gerade 1000 Volt zeigt. Wie nun auch der Conduktor geladen werden mag, es wird das zweite Elektrometer, wenn es nur in gleicher Lage stehen bleibt, stets den zehnten Theil der Spannung des Conduktors zeigen, man wird also damit, wenn es auf 10 000 Volt geacht ist, noch 100 000 Volt messen können u. s. w.

#### f) Wirkungen der Selbstinduktion.

Bereits Jaumann hat darauf hingewiesen, dass nicht allein das statische Potentialgefälle, sondern auch Schwankungen des Potentials für den Eintritt einer Entladung maassgebend sind, speciell Schwankungen, welche durch kleine Funken erzeugt werden. Eine Vorausberechnung dieser Schwankungen ist nicht möglich, weil dabei die durch den Funken veranlasste Selbstinduktion in Betracht kommt, die selbst wieder durch die unmessbare eminent kurze Dauer des Funkens bedingt wird.

Hierdurch werden auch alle Bestimmungen bei *plötzlicher* Entladung des Conduktors illusorisch gemacht, insofern hierbei nicht nur abnorm grosse uncontrollirbare Schwankungen des Potentials durch Selbstinduktion, sondern geradezu oscillirende Entladungen hervorgerufen werden können, namentlich wenn der Conduktor mit Condensatoren verbunden ist. Durch Verwendung niederer Spannung, nämlich durch Anschliessen eines Vacuumrohres mit äusseren Elektroden an die Pole der erwähnten vielplattigen Accumulatorenatterie unter Zwischenschaltung eines rotirenden Commutators, welcher gestattete in rascher Folge die Belege mit den Polen der Batterie und dann unter sich zu verbinden, konnte die Wirkung der Selbstinduktion durch Verminderung der Ladung sehr vermindert werden, ohne das Leuchten zu hindern, ob indessen die am Commutator auftretenden Fünkchen nicht immerhin noch beachtenswerthe Potentialschwankungen erzeugten, erscheint fraglich.

Wie man sieht, bietet diese erste Methode zur Bestimmung des Entladungspotentialgefälles nur dann Aussicht auf Erfolg, wenn die Potentialänderungen durch Entladung eines Conduktors mit geringer Ladung vorgenommen werden und zwar





















## VI. *Die Ausdehnung des Wassers mit der Temperatur; von Karl Scheel.*

---

Die Ausdehnung des Wassers ist seither nach zwei Methoden bestimmt worden.

Nach der ersten Methode, welche als die der Wägung bezeichnet werden kann, wird ein Körper, Glas oder Metall, von bekannter Ausdehnung zunächst in der Luft, dann in Wasser von verschiedener Temperatur gewogen. Aus dem jedesmaligen Gewichtsverlust im Wasser gegenüber dem Gewichte im Vacuum lässt sich die Dichte des Wassers bei verschiedenen Temperaturen im Verhältniss etwa zur Dichte bei 4° C. und daraus die Volumsänderung des Wassers mit der Temperatur ableiten. Nach dieser Methode ist eine ganze Reihe von älteren Untersuchungen, insbesondere von Hallström<sup>1)</sup>, Stampfer<sup>2)</sup>, Hagen<sup>3)</sup> und Matthiessen<sup>4)</sup> angestellt worden.

Auch nach der zweiten, der dilatometrischen Methode vorgenommene Bestimmungen liegen in grösserer Zahl vor. Diese Methode besteht darin, dass das Wasser in thermometerähnliche Glasgefässe, für welche Kopp den Ausdruck „Dilatometer“ eingeführt hat, eingeschlossen, und nun seine scheinbare Ausdehnung in diesem Gefässe bestimmt wird. Kennt man die kubische Ausdehnung des betreffenden Glases, so lässt sich hieraus die absolute Ausdehnung des Wassers ableiten. Dieser Methode bedienten sich schon früher Des-

---

1) Hallström, Pogg. Ann. 1. p. 149 und 34. p. 220.

2) Stampfer, Pogg. Ann. 21. p. 75.

3) Hagen, Abhandlungen der kgl. Akad. der Wissenschaften zu Berlin. 1855.

4) Matthiessen, Pogg. Ann. 128. p. 512.



Beitrags Nr. 1 hat auch J. Herr<sup>1)</sup> die Resultate über die Ausdehnung des Wassers discutirt, doch beschränkt er sich auf die Werthe von Hallström, Muncke, Stampfer, Kopp und Pierre. Das grosse Verdienst Herr's hierbei ist, dass er die Beobachtung von Pierre, welche ohne Zweifel den besten angehören, neu berechnet und kritisch behandelt hat. Während Frankenheim<sup>2)</sup> die Resultate Pierre's nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnete, aber mit einer von ihm selbst zwar als unrichtig, aber als für die Rechnung bequemer hingestellten Gewichtsvertheilung, welche der Gleichung

$$\frac{V_t - V_0}{V_0 \cdot t} = A + Bt + Ct^2$$

entspricht, legt Herr die Formel zu Grunde

$$V_t = V_0 (1 + At + Bt^2 + Ct^3).$$

Aus den Werthen von Muncke, Stampfer, Kopp und Pierre unter Ausschluss von Hallström bildet Herr dann die mittlere Interpolationsformel für die Ausdehnung des Wassers:

$$V_t = V_0 (1 - 0,000\,059\,846\,5\,t + 0,000\,007\,886\,85\,t^2 - 0,000\,000\,043\,043\,t^3).$$

Auf Grund dieser Formel hat später Broch für die Bedürfnisse des internationalen Bureaus im I. Bande der Travaux et Mémoires eine von 0,1° zu 0,1° fortschreitende Tafel für die Volumina des Wassers bei verschiedenen Temperaturen und eine ebenfalls von 0,1° zu 0,1° fortschreitende Tafel der Logarithmen des specifischen Gewichtes des Wassers berechnet, eine Zusammenstellung, welche auch in die Tafelsammlung von Landolt und Börnstein übergegangen ist.

Endlich hat noch in neuerer Zeit Hr. Volkmann die bisherigen Resultate über die Ausdehnung des Wassers diskutirt. Auf die Art seiner Kritik will ich hier jedoch nicht eingehen.<sup>3)</sup>

1) Herr, Ueber das Verhältniss des Bergkrystall-Kilogramms zum Kilogramm der Archive. Wien 1870.

2) Frankenheim, Pogg. Ann. 86. p. 278.

3) Siehe meine Dissertation: Die Ausdehnung des Wassers mit der Temperatur. Berlin 1890. p. 3—5.





thode haben Hr. Marek <sup>1)</sup> und Hr. Thiesen <sup>2)</sup> im internationalen Maass- und Gewichtsbureau gethan. Beide bestimmten nach der Wägungsmethode, welche Correctionen noch an die von Broch angenommenen Werthe anzubringen seien, um die richtigen Zahlen für die Ausdehnung des Wassers zu erhalten.

Hr. Marek hat seine Untersuchungen später auf der kais. Normal-Aichungscommission in Wien weiter fortgesetzt. Bisher hat derselbe die erhaltenen Resultate jedoch nur in einer kurzen Notiz veröffentlicht.<sup>3)</sup>

Die vorliegende Arbeit ist auf Veranlassung des Hrn. Pernet, früher Mitglied bei der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt im Jahre 1889 in dessen Privatlaboratorium, mit Unterstützung seitens der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt, ausgeführt. Ihr Zweck war, auch nach der dilatometrischen Methode einwandfreie Werthe für die Ausdehnung des Wassers zu liefern. Diese Bestimmung sollte eine Vorarbeit bilden für die umfangreichen Untersuchungen über die Ausdehnung des Wassers, die in der I. Abtheilung der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt für die allernächste Zeit geplant sind.

### Beschreibung der Apparate.

#### I. Thermometer.

Bei den Untersuchungen wurden drei Quecksilberthermometer, W, 102 und Pt<sub>11</sub>, benutzt, welche mir von Hrn. Pernet gütigst zur Verfügung gestellt waren. Pt<sub>11</sub> ist Eigenthum des Hrn. Pernet, W und 102 gehören der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.

Alle drei sind Stabthermometer, deren direct aufgezogene gleichmässige Theilungen von den Hrn. Jaeger und Wurtzel mit grosser Sorgfalt auf der Theilmaschine des Hrn. Pernet ausgeführt worden sind. Nach den Messungen an Hauptnormalthermometern zu schliessen, dürf-

---

1) Marek, Travaux et Mémoires tome 3. p. D. 82—90.

2) Thiesen, Bisher liegt über diese Versuche nur eine vorläufige Veröffentlichung im „Rapport de la conférence générale des Poids et Mesures, Sept. 1889, p. 111“, vor.

3) Marek, Wied. Ann. 44. p. 171—172.



Die *Druckcoefficienten* wurden in der üblichen Weise beide experimentell ermittelt. Dieselben, von der Ordnung des zehntausendsten Theiles eines Grades für 1 mm Aenderung des äusseren bezw. inneren Druckes sind bis auf etwa 3 Proc. genau bestimmt.

Der *Fundamentalabstand* wurde von allen drei Thermometern wiederholt ermittelt. Die Genauigkeit seiner Bestimmung beträgt etwa  $0,003^{\circ}$ .

Die *Vergleichung der Thermometer* ergab kleine systematische Differenzen bis zu  $0,02^{\circ}$ , die unerklärt geblieben sind. Die gefundenen Differenzen wurden ausgeglichen und mit Hülfe der gefundenen Werthe alle Angaben auf die des Thermometers W. reducirt. Eine directe vorläufige von Hrn. Gumlich, technischem Hilfsarbeiter bei der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt, ausgeführte Vergleichung des Thermometers W. mit dem der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt gehörenden Thermometer Tonnelot Nr. 4636<sup>1)</sup> ergab, dass beide innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler gleiche Angaben liefern. Die Thermometerangaben konnten daher schliesslich mittels der für französisches Hartglas von Chappuis<sup>2)</sup> gefundenen Reductionen auf die Scala des Wasserstoffthermometers umgerechnet werden.

## II. Barometer.

Das benutzte Barometer war ein sogenanntes Normalbarometer, System Wild-Fuess, dessen beide Schenkel vertical übereinander gelegen sind. Zur Reduction der beobachteten Barometerstände auf  $0^{\circ}$  bediente ich mich der von Broch berechneten Tafeln, welche einen Theil der vom permanenten internationalen Comité herausgegebenen Tafeln bilden.

Soweit das Barometer bei Siedepunktsbestimmungen benutzt war, wurde die wirkliche Siedetemperatur aus dem reducirten Barometerstande gemäss der Tafel abgeleitet, welche Hr. Broch im 1. Bande der Travaux et Mémoires angibt und welche auch in den Tafeln von Landolt und Börnstein sich findet.

1) Das Thermometer Tonnelot Nr. 4636 ist im internationalen Maass- und Gewichtsbureau untersucht und an die dortigen Thermometer angeschlossen.

2) Chappuis, Travaux et Mémoires du bureau international. 6. p.116.















1. Reihe: Eispunkt bei etwa 2500  $\sigma$ .

Siede- temperatur	Ausdehnung	B.—R. in 0,000 001
99,657°	0,040 605 <sub>2</sub>	+ 38 <sub>8</sub>
649°	564 <sub>9</sub>	+ 4 <sub>3</sub>
716°	600 <sub>5</sub>	— 8 <sub>9</sub>
705°	594 <sub>2</sub>	— 7 <sub>1</sub>
680°	572 <sub>3</sub>	— 8 <sub>9</sub>
682°	577 <sub>5</sub>	— 7 <sub>1</sub>
742°	619 <sub>0</sub>	— 9 <sub>2</sub>
791°	666 <sub>5</sub>	+ 2 <sub>8</sub>
818°	677 <sub>0</sub>	— 6 <sub>3</sub>
100,042°	856 <sub>8</sub>	+ 10 <sub>6</sub>
021°	820 <sub>7</sub>	— 10 <sub>0</sub>
99,976°	801 <sub>0</sub>	+ 3 <sub>0</sub>

Hieraus folgt  $v_t - v_m = 7,26 (t - t_m)$ , wo  $t_m = 99,790$ ;  
 $= 1,040 663_0$ .

2. Reihe: Eispunkt bei etwa 1500  $\sigma$ .

Siede- temperatur	Ausdehnung	B.—R. in 0,000 001
100,210°	0,040 968 <sub>6</sub>	— 3 <sub>8</sub>
175°	942 <sub>9</sub>	— 1 <sub>0</sub>
141°	923 <sub>9</sub>	+ 7 <sub>7</sub>
138°	910 <sub>3</sub>	— 3 <sub>4</sub>
086°	864 <sub>3</sub>	— 7 <sub>1</sub>
037°	827 <sub>7</sub>	— 3 <sub>8</sub>
99,991°	804 <sub>2</sub>	+ 10 <sub>3</sub>

Hieraus folgt  $v_t - v_m = 8,15 (t - t_m)$ , wo  $t_m = 100,111$ ;  
 $= 1,040 891_7$ .

3. Reihe: Eispunkt bei etwa 250  $\sigma$ .

Siede- temperatur	Ausdehnung	B.—R. in 0,000 001
99,735°	0,040 632 <sub>1</sub>	+ 1 <sub>3</sub>
786°	663 <sub>8</sub>	+ 2 <sub>5</sub>
770°	648 <sub>0</sub>	— 3 <sub>7</sub>
860°	699 <sub>8</sub>	— 5 <sub>8</sub>
864°	707 <sub>3</sub>	— 0 <sub>6</sub>
845°	697 <sub>3</sub>	+ 0 <sub>8</sub>
839°	695 <sub>5</sub>	+ 2 <sub>5</sub>
917°	742 <sub>7</sub>	+ 3 <sub>1</sub>
916°	740 <sub>4</sub>	+ 1 <sub>4</sub>

Hieraus folgt  $v_t - v_m = 5,98 (t - t_m)$ , wo  $t_m = 99,837$ ;  
 $= 1,040 691_8$ .

4. Reihe: Eispunkt bei etwa 0  $\sigma$ .

Siede- temperatur	Ausdehnung	B.—R. in 0,000 001
99,886°	0,040 722 <sub>8</sub>	+ 2 <sub>8</sub>
857°	699 <sub>1</sub>	+ 3 <sub>7</sub>
854°	693 <sub>0</sub>	+ 0 <sub>2</sub>
797°	640 <sub>8</sub>	— 3 <sub>5</sub>
941°	773 <sub>2</sub>	+ 6 <sub>4</sub>
956°	770 <sub>6</sub>	— 8 <sub>9</sub>

Hieraus folgt  $v_t - v_m = 8,50 (t - t_m)$ , wo  $t_m = 99,882$ ;  $v_m = 1,040 716_6$ .

Die scheinbare Ausdehnung des Wassers im Jenaer Glase für 100° selbst ergibt sich aus obigen Formeln, wenn man  $t = 100$  setzt und zwar:

1. 12 Beob. zwischen 99,649° u. 100,042 40815,5<sup>1</sup>  $\pm$  2,7<sup>1</sup>
2. 7 „ „ 99,991° „ 100,210 40801,2<sup>1</sup>  $\pm$  1,6<sup>1</sup>
3. 9 „ „ 99,735° „ 99,917 40789,3<sup>1</sup>  $\pm$  0,7<sup>1</sup>
4. 6 „ „ 99,797° „ 99,956 40816,9<sup>1</sup>  $\pm$  1,5<sup>1</sup>.

Die Differenzen zwischen den einzelnen Bestimmungen scheinen darauf hinzudeuten, dass durch das häufige Sieden das Kaliber des Dilatometers sich geändert habe. Leider war es nicht möglich, durch eine nochmalige Kalibrirung diese Fehlerquelle zu beseitigen, da das Innere des Rohres bereits vom Wasser so stark angegriffen war, dass die Quecksilberfäden bei der Verschiebung zerrissen.

Gibt man nun aber jeder Bestimmung das Gewicht, welches ihr gemäss der Anzahl der Einzelbeobachtungen zukommt, aus denen sie sich zusammensetzt, so ergibt sich im Mittel die scheinbare Ausdehnung des Wassers pro Liter:

$$40805,9^1 \pm 4,3^1.$$

## II. Die scheinbare Ausdehnung zwischen 0° und 33°.

Die Ausdehnung des Wassers zwischen 0° und 33° wurde bestimmt durch Vergleichung des Dilatometers mit je zwei Quecksilberthermometern in einem Wasserbade von constanter Temperatur. Als Vergleichsgefäss diente dabei ein 70 cm hoher, etwa 100 Liter haltender irdener Topf, welcher durch einen mit Zinkblech ausgeschlagenen, etwa 2 cm dicken Holzdeckel verschlossen war. Dieser Deckel war in der Mitte







Reihe	Nummer der Beobachtung	Temperatur nach dem Wasserstoff- Thermometer	Scheinbare Ausdehnung des Wassers $10^{-6} \times$	Uebrigbleibe Fehler (B.— in $\lambda$ pro Li	
				1	
I	9	18,940	986,2	+ 4,1	+
II	59	18,976	988,1	— 0,1	+
I	10	19,985	1166,1	— 3,0	—
II	60	20,050	1181,6	+ 0,5	+
II	61	20,978	1354,3	— 3,3	—
I	11	21,014	1367,8	+ 3,2	+
I	12	21,948	1552,1	+ 0,9	+
II	62	22,009	1565,5	+ 1,3	+
I	13	23,016	1774,2	— 2,5	+
II	66	23,083	1786,3	— 4,9	+
I	14	23,963	1980,4	— 5,3	+
II	67	23,984	1981,5	— 8,9	—
II	68	24,882	2187,0	— 9,9	—
I	15	25,056	2229,3	— 8,4	—
I	16	25,893	2421,6	— 16,7	—
II	69	25,984	2446,3	— 14,1	—
II	80	26,895	2685,0	— 1,8	+
I	17	26,926	2693,4	— 1,2	+
II	81	27,891	2937,0	— 5,5	
I	18	27,903	2938,6	— 7,1	—
I	19	28,907	3205,0	— 7,3	—
II	82	28,962	3221,4	— 5,7	—
II	85	29,964	3495,5	— 6,5	—
I	20	30,032	3512,1	— 8,8	—
II	89	30,884	3768,7	+ 7,2	+
II	84	30,940	3771,1	— 6,4	—
II	83	30,949	3773,7	— 6,8	—
II	86	30,989	3804,1	+ 12,6	+
II	90	31,927	4078,7	+ 15,1	+
II	87	32,008	4098,2	+ 10,8	+
II	91	32,871	4364,3	+ 20,2	+
II	88	33,039	4404,5	+ 9,8	—

Es war von vornherein unwahrscheinlich, dass srlichen Beobachtungen der gleiche Grad der Genauigkeit komme. Da aber die Ausdehnung des Wassers sich darstellt als eine nach Potenzen der Temperatur fortschreit Function, deren Charakter erfahrungsmässig wesentlich durch das quadratische Glied bestimmt wird, da ferner diese Function, gemäss des eigenthümlichen Verhaltens des Wassers der Nähe von 4° C. ein Minimum besitzt, so ist die Bestimmung des Gewichts der einzelnen Beobachtungen eine usschwierige Aufgabe. Ich bin daher Hr. Thiesen, der bereits ähnliche Fälle behandelte, zu besonderem Danke





kann man die Werthe von  $(\delta f)^2$  als Ordinaten, die von  $(df/dt)^2$  als Abscissen für die oben aufgeführten Temperaturen graphisch auftragen. Da nun  $(\delta f)^2 = (\Delta f)^2 + (\Delta t)^2 (df/dt)^2$  eine lineare Function von  $(df/dt)^2$  ist, so müssen streng genommen alle eingetragenen Punkte auf einer geraden Linie liegen. Obwohl diese Bedingung nicht ganz erfüllt ist, so schmiegen sich doch die Werthe derjenigen Linie, die durch die Eigenschaft  $(\Delta f)^2 = (\Delta t)^2$  definirt ist, verhältnissmässig gut an. Man kommt daher der Wahrheit am nächsten, wenn man  $(\Delta f)^2 = (\Delta t)^2$  setzt und somit für das Gewicht die Form  $C/[1 + (df/dt)^2]$  einführt, wo  $C$  eine Constante bedeutet und  $(df/dt)$  in Einheiten der vierten Decimale zu nehmen ist. — Da die Gewichte nur Verhältnisszahlen ausdrücken, so ist es gleichgültig welchen Werth man der Constanten  $C$  beilegt. Wählt man dieselbe so, dass für die Beobachtungen bei 4° C. das Gewicht gleich 10 wird, so lässt sich für die Gewichte die folgende Tafel aufstellen:

Grad	Gew.	Grad	Gew.	Grad	Gew.	Grad	Gew.	Grad	Gew.
1	10	8	9	15	4	22	2	29	1
2	10	9	8	16	3	23	2	30	1
3	10	10	7	17	3	24	2	31	1
4	10	11	6	18	3	25	2	32	1
5	10	12	6	19	3	26	1	33	1
6	10	13	5	20	2	27	1		
7	10	14	4	21	2	28	1		

Es handelt sich jetzt darum, die Beobachtungen durch eine Interpolationsformel zusammenzufassen. Wie schon oben angedeutet wurde, lässt sich die Ausdehnung des Wassers darstellen als eine nach ganzen Potenzen fortschreitende Function der Temperatur. Bezeichnet man also das scheinbare Volumen bei  $t^0$  mit  $V_t$ , so ist demnach:

$$V_t = V_0 (1 + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \dots)$$

Beschränkt man sich auf die dritte Potenz, so wird:

$$A = \frac{V_t - V_0}{V_0} = \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 \dots 1).$$

wo  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  noch zu bestimmende Constante,  $A$  die in der voraufgegangenen Zusammenstellung der Resultate in der vierten Spalte aufgeführten Werthe bedeutet. —



Volumen des Ballons bis zum Eispunkte,  $v_0$  das Volumen des Rohres vom Eispunkte bis zum Stande der Wasserkuppe bei  $t^0$ ; beide  $V_0$  und  $v_0$  gemessen bei  $0^0$ , so ist:

$$(V_0 + v_0)(1 + g t) = V_0(1 + q t) \text{ oder:}$$

$$\frac{v_0}{V_0} = \frac{(q - g) t}{1 + g t}.$$

$v_0 / V_0$  ist diejenige Grösse, die wir oben mit

$$A = \frac{V_t - V_0}{V_0} = \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \delta t^4$$

bezeichnet haben; also wird:

$$A = \frac{(q - g) t}{1 + g t},$$

woraus sich der absolute Ausdehnungscoefficient des Wassers:

$$(1) \quad q = \frac{A}{t}(1 + g t) + g$$

ergibt.

Die Ausdehnung des Jenaer Glases 16<sup>III</sup> ist neuerdings von Hrn. Prof. Thiesen und mir <sup>1)</sup> in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt bestimmt worden. Wir fanden in der Scale des Wasserstoffthermometers linear

$$l_t = l_0(1 + 10^{-6} \times 7,707 t + 10^{-6} \times 0,003 64 t^2)$$

woraus sich die kubische Ausdehnung ergibt:

$$(2) \quad v_t = v_0(1 + 10^{-6} \times 23,121 t + 10^{-6} \times 0,011 10 t^2)$$

und somit

$$(3) \quad g_{100} = 0,000 024 231.$$

Mittelst dieses letzten Werthes ergibt sich durch die Formel 1) die wahre Ausdehnung des Wassers für  $100^0$ , wenn man nach p. 445 setzt:

$$A = 0,0 40 8059$$

im Werthe

$$q = 0,000 433 36$$

also

$$V_{100} = V_0 \times 1,043 336,$$

oder wenn man das Volumen im Minimum, also bei  $3,960^0$  gleich 1 setzt

---

1) M. Thiesen u. K. Scheel, Zeitschr. f. Instr.-Kde. 12. p. 293. 1892.



eingeführt, so wird (nach der Wasserstoffscale):

$$q = [-64,268 + 8,505\,26\,t - 0,067\,897\,7\,t^2 + 0,000\,401\,209\,t^3] \times 10^{-6}$$

und somit das Volumen  $V_t$  ausgedrückt durch das Volumen  $V_0$  bei  $0^\circ$

$$V_t = V_0 [1 - 0,000\,064\,268\,t + 0,000\,008\,505\,26\,t^2 - 0,000\,000\,067\,897\,7\,t^3 + 0,000\,000\,000\,401\,209\,t^4],$$

woraus sich das Minimum des Volumens bei 3,960 zu

$$V_{3.960} = 0,999\,874\,8$$

ergiebt.

In der folgenden Tabelle sind die Dichten des Wassers, wie sie sich aus der letzten Formel ableiten lassen, im Verhältniss zur Dichte bei  $3,960^\circ$  angegeben, denen zur Vergleichung die entsprechenden Werthe von Thiesen und Marek beigelegt sind.

Dichte des Wassers.

Wasserstoff- scala Temperatur	Scheel	Thiesen	Marek	Mittel	Abweichung vom Mittel in Einheiten d. 7. Stelle		
					Scheel- Mittel	Thiesen- Mittel	Marek- Mittel
0	0,999 8748	8696	8767	8737	+ 11	- 41	+ 30
1	9306	9278	9314	9299	+ 7	- 21	+ 15
2	9699	9704	9700	9701	- 2	+ 3	- 1
3	9929	9935	9928	9931	- 2	+ 4	- 3
4	1,000 0000	0000	0000	0000	0	0	0
5	0,999 9918	9916	9919	9918	0	- 2	+ 1
6	9684	9685	9688	9686	- 2	- 1	+ 2
7	9303	9307	9312	9307	- 4	0	+ 5
8	8777	8778	8792	8782	- 5	- 4	+ 10
9	8112	8107	8128	8116	- 4	- 9	+ 12
10	7309	7296	7327	7311	- 2	- 15	+ 16
11	6373	6351	6391	6372	+ 1	- 21	+ 19
12	5305	5273	5321	5300	+ 5	- 27	+ 21
13	4109	4067	4123	4100	+ 9	- 33	+ 23
14	2789	2738	2797	2775	+ 14	- 37	+ 22
15	1347	1290	1347	1328	+ 19	- 38	+ 19
16	0,998 9786	9722	9776	9761	+ 25	- 39	+ 15
17	8108	8041	8087	8079	+ 29	- 38	+ 8
18	6314	6242	6282	6279	+ 35	- 37	+ 3
19	4412	4333	4365	4370	+ 42	- 37	- 5
20	2399	2321	2339	2353	+ 46	- 32	- 14
21	0280	0211	0205	0232	+ 48	- 21	- 27
22	0,997 8057	7996	7972	8008	+ 49	- 12	- 36
23	5731	5683	5639	5684	+ 47	- 1	- 45
24	3305	3270	3207	3261	+ 44	+ 9	- 54

Wasserstoff- scala temperatur	Scheel	Thiesen	Marek	Mittel	Abweichung vom Mittel in Einheiten d. 7. Stelle		
					Scheel- Mittel	Thiesen- Mittel	Marek- Mittel
25	0,997 0781	0749	0681	0737	+ 44	+ 12	— 56
26	0,996 8161	8121	8061	8114	+ 47	+ 7	— 53
27	5445	5401	5353	5400	+ 45	+ 1	— 47
28	2637	2595	2558	2597	+ 40	— 2	— 39
29	0,995 9737	9704	9679	9707	+ 30	— 3	— 28
30	6746	6731	6720	6732	+ 14	— 1	— 12
31	3667	3660	3682	3670	— 3	— 10	+ 12
32	0502						
33	0,994 7250						

In weiteren Spalten sind der Mittelwerth aus den Resultaten von Thiesen, Marek und mir, sowie die Abweichung der drei Beobachter von diesem Mittel aufgeführt.

Diese Zusammenstellung lehrt, dass die Differenzen der Resultate, namentlich auch der nach verschiedenen Methoden gemittelten auf eine erträgliche Grösse herabgemindert sind; sie zeigen, dass im Intervall zwischen 0° und 30°, wenn man den Mittelwerth von allen drei Beobachtern zu Grunde legt, die Ausdehnung des Wassers bis auf wenige Mikroliter pro Grad nunmehr bekannt ist.

## VII. *Eine Methode zur Bestimmung der Dichtigkeit der gesättigten Dämpfe und der Ausdehnung von Flüssigkeiten bei höheren Temperaturen;* *von B. Galitzine.*

(Hierzu Tafel VI Fig. 15.)

### Bestimmung der Dichtigkeit der gesättigten Dämpfe.

Die Frage der Dichtigkeit der gesättigten Dämpfe ist von vielen Physikern experimentell und theoretisch behandelt worden. Die wichtigsten Untersuchungen darüber verdanken wir Cahours<sup>1)</sup>, Bineau<sup>2)</sup>, Regnault<sup>3)</sup>, Fairbairn und Tait<sup>4)</sup>, Hirn<sup>5)</sup>, Horstmann<sup>6)</sup>, Herwig<sup>7)</sup>, Avenarius<sup>8)</sup>, Ansdell<sup>9)</sup>, Wüllner und Grottrian<sup>10)</sup>, Schoop<sup>11)</sup>, Ramsay und Young<sup>12)</sup>, Cailletet und Mathias<sup>13)</sup>, Perot<sup>14)</sup>, Battelli<sup>15)</sup> u. a.

In eine Besprechung und Kritik derselben ist nicht mein Zweck, hier einzugehen; nur bemerke ich, dass, während einige der erwähnten Forscher ihre Untersuchungen auf niedrige Temperaturen beschränkt haben, andere, wie z. B. Avenarius

1) Cahours, Compt. rend. **20.** p. 51. 1845.

2) Bineau, Ann. de chim. et de phys. (3) **18.** p. 226. 1846.

3) Regnault, Mém. de l'acad. **26.** p. 200.

4) Fairbairn u. Tait, Phil. Mag. (4) **21.** p. 230. 1861.

5) Hirn, Théorie mécanique de la chaleur. Paris 1862.

6) Horstmann, Lieb. Ann. Suppl. **6.** p. 51. 1868.

7) Herwig, Pogg. Ann. **137.** p. 19 u. 592. 1869; **141.** p. 83. 1870.

8) Avenarius, Bull. de l'acad. imp. des scienc. de St. Pétersburg. **22.** p. 378. 1876; Mém. phys. et chim. **9.** p. 647. 1876.

9) Ansdell, Proc. R. Soc. **30.** p. 117. 1879.

10) Wüllner u. Grottrian, Wied. Ann. **11.** p. 545. 1880.

11) Schoop, Wied. Ann. **12.** p. 550. 1881.

12) Ramsay u. Young, Phil. Trans. **1.** p. 123. 1886; **2.** p. 1. 1886; Trans. chem. soc. p. 790. 1886; Proc. R. soc. of London. **42.** 1887; Phil. Mag. **23.** p. 435. 1887; **24.** p. 196. 1887; Journ. chem. soc. of London. **299.** p. 755. 1887; Proc. R. soc. **54.** p. 387. 1888.

13) Cailletet u. Mathias, Journ. de phys. (2) **5.** p. 549. 1886.

14) Perot, Ann. de chim. et de phys. (6) **13.** p. 145. 1888.

15) Battelli, Sulle proprietà termiche dei vapori. **1.** Torino 1889, bei Loescher; auch N. Cim. (3) **30.** p. 235. 1891.





Flüssigkeit und darüber gesättigten Dampf; die entsprechenden absoluten Dichtigkeiten mögen durch  $\varrho$ , resp.  $\delta$ , bezeichnet werden:

$$\delta < \Delta < \varrho.$$

Ist  $\Delta$  kleiner als die kritische Dichte, so wird bei fortgesetztem Erwärmen des Röhrchens Folgendes eintreten: Die Trennungsfläche zwischen Flüssigkeit und Dampf wird ihre Stelle im Rohre ändern. Wie diese Aenderungen für andere Zwecke zu verwerthen sind, werden wir in Folgendem sehen. Doch muss bei hinreichend höherer Temperatur das Flüssigkeitsniveau bei fortgesetztem Erwärmen schliesslich allmählich herabsinken. Bei einer bestimmten Temperatur  $t$ , die zu notiren ist, werden die letzten Spuren Flüssigkeit verdampfen, und das Rohr wird mit gesättigtem Dampfe von der Dichte  $\delta_t = \Delta$  gefüllt. Man erhält auf diese Weise zwei zugehörige Werthe von  $\delta$  und  $t$ . Lässt man das Röhrchen sich langsam abkühlen, so kann man das Erscheinen der ersten Flüssigkeitstheilchen ebenfalls beobachten und daraus zwei weitere zugehörige Werthe von  $\delta$  und  $t$  erhalten. Durch abwechselnde Erwärmung und Abkühlung des Versuchsrohres kann man sehr leicht und schnell sich ein reiches Zahlenmaterial verschaffen. Wiederholt man dieselben Beobachtungen für andere relative Füllungen, d. h. für andere Werthe von  $\Delta$ , so kann man die Abhängigkeit der Dichtigkeit des gesättigten Dampfes der zu untersuchenden Flüssigkeit von der Temperatur sogar bis zum kritischen Punkte ohne Schwierigkeit ermitteln.

Diese Methode, wie die zu ihrer Controlle angestellten Versuche gezeigt haben, hat sich in der That als eine sehr leicht durchführbare erwiesen, da sie wirklich nur minimale Hilfsmittel erfordert. Die Beobachtungen gehen verhältnissmässig rasch vor sich, was bei dem Verfahren von Avenarius nach seinen eigenen Angaben<sup>1)</sup> nicht der Fall war. Ausserdem hat man keine mühsamen Kalibrirungen auszuführen und braucht zu den Versuchen nur äusserst kleine Mengen der zu untersuchenden Substanz, die man zugleich im Versuchsrohre in reinem Zustande hat, und nicht, wie bei den meisten Methoden, mit Quecksilberdampf gemischt: ein Vorthail.

1) Avenarius, Mém. phys. et chim. 9. p. 655. 1876.



Auf einen Umstand muss ich noch aufmerksam machen. Die Bestimmungen der Dichtigkeit der gesättigten Dämpfe sind wegen des möglichen Eintretens eines Verflüssigungsverzuges, auf den viele schon aufmerksam gemacht haben<sup>1)</sup>, immer etwas unsicher. Dieser Verflüssigungsverzug soll bekanntlich von der Gestalt der Isotherme in der Nähe des Condensationspunktes unmittelbar abhängen. Es ist also zu erwarten, dass bei der vorher beschriebenen Methode diejenigen Dampfdichten, welche bei der Abkühlung des Versuchsrohres erhalten werden, wenn sie auch auf eine Nullabkühlungsgeschwindigkeit reducirt sind, etwas zu gross ausfallen werden.

Zur Controlle dieser Methode sind, dank der freundlichen Unterstützung des Hrn. Prof. Sokolow, in dem physikalischen Laboratorium der Universität zu Moskau Versuche mit Aetherdampf von Stud. P. Stepanoff und unter meiner unmittelbaren Anweisung ausgeführt worden, die ich hier in aller Kürze wiedergeben werde.

Der benutzte Aether war über Natrium destillirt und von Kahlbaum in Berlin bezogen.

Die Erwärmung der Versuchsröhre geschah gewöhnlich mittels einer besonderen Art des Magnus'schen Luftbades, das aus drei Kästen bestand und mit einem Rührer versehen war. Das Ganze (mit Brennern) war noch von einer Eisenblechhülle umgeben. Die Erwärmung des Luftbades sollte dabei nicht ganz von unten, sondern etwas von der Seite geschehen. Auf diese Weise konnte man eine viel gleichmässigere Temperaturvertheilung erzielen und das scheinbare Sieden der Flüssigkeit im Rohre, eine bei solchen Versuchen bekannte Erscheinung, vollständig vermeiden. Die benutzten Thermometer, von Dr. Geissler's Nachf. F. Müller in Bonn geliefert, waren in  $\frac{1}{5}^{\circ}$  getheilt und mit einer Correctionstabelle der technischen Reichsanstalt zu Charlottenburg versehen.

Es sind sechs verschiedene Röhren untersucht worden; für jedes Rohr sind mehrere Beobachtungsreihen bei ver-

1) Vgl. z. B. van der Waals, Ueber die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes. Leipzig 1881; Wüllner u. Grottrian. Wied. Ann. 11. p. 545–604. 1880; R. v. Helmholtz, Wied. Ann. 27. p. 508. 1886; Blümcke, Wied. Ann. 36. p. 911. 1889, u. a. Auch Wüllner, Lehrb. der Exp. Phys. 3. p. 704–706. 785. 4. Aufl. 1885.



Curven aufgetragen (vgl. Taf. VI, Fig. 15). Die Abscissen stellen die Temperaturen und die Ordinaten die entsprechenden specifischen Volumina  $s$  des gesättigten Aetherdampfes dar. Die obere Curve ( $B$ ) gibt die Beobachtungen Battelli's<sup>1)</sup>, die untere ( $A$ ) diejenigen Avenarius'<sup>2)</sup> und die Curve  $S$  diejenigen Stepanoff's<sup>3)</sup> wieder. Die Curve  $C$  ist nach den Angaben Clausius'<sup>4)</sup> gezeichnet worden, der diese Zahlen nach seiner Theorie aus den Angaben Sajontschewsky's berechnet hat. Man sieht, dass die Angaben Stepanoff's im allgemeinen gut mit denjenigen Battelli's übereinstimmen, welche jedenfalls als die sorgfältigsten Beobachtungen über diesen Gegenstand zu betrachten sind.

Es möge hier noch bemerkt werden, dass die zwei Werthe von  $s$ , welche sehr nahe liegenden Temperaturen entsprechen (173,8 und 173,4), obgleich sie mit ganz verschiedenen Rohren erhalten worden sind, eine sehr gute Uebereinstimmung mit einander zeigen, wie die Curve ( $S$ ) uns lehrt.

Es würde also vielleicht nicht zu gewagt sein, wenn man aus allem Vorhergesagten den Schluss ziehen würde, dass die hier beschriebene Methode, die jedenfalls leicht und schnell ausführbar ist, für hohe Temperaturen auch auf Genauigkeit Anspruch machen kann.

#### Ueber die Ausdehnung von Flüssigkeiten.

Die thermische Ausdehnung von Flüssigkeiten ist eine Frage, die eine sehr umfangreiche Literatur besitzt. Doch beschränken sich die meisten Untersuchungen auf verhältnissmässig niedrige Temperaturen, wobei also die zu untersuchenden Flüssigkeiten unter dem Drucke der äusseren Atmosphäre sich befanden. Beobachtungen über die Ausdehnung von Flüssigkeiten bei höheren Temperaturen sind nur in begrenzter Anzahl vorhanden, jedenfalls, weil sie besondere experimentelle Schwierigkeiten darbieten, obgleich es andererseits nicht zu leugnen ist, dass sie für die Theorie des flüssigen Zustandes

1) Battelli, Sulle proprietà etc. p. 65.

2) Avenarius, Bull. de l'acad. imp. des scienc. de St. Pétersbourg. 22. p. 378—389. 1876; Mém. phys. et chim. 9. p. 662. 1876.

3) Vgl. vorige Tabelle.

4) Clausius, Wied. Ann. 14. p. 701. 1881.



Denkt man sich wie früher ein kleines Röhrchen vom Volumen  $V$ , in welchem die Menge  $Q$  der zu untersuchenden Substanz sich befindet. Die mittlere Dichte sei, wie früher:

$$(1) \quad \Delta = \frac{Q}{V}.$$

Ein Theil der Substanz, sei es  $q$ , befindet sich in dampfförmigem Zustande und nehme das Volumen  $v$  ein. Das Volumen der eigentlichen Flüssigkeit sei  $v_1$ . Die entsprechenden absoluten Dichtigkeiten seien, wie früher, durch  $\delta$  und  $\rho$  bezeichnet, wobei  $\delta$  nach Ausführung der früher beschriebenen Beobachtungen jetzt als bekannte Function der Temperatur vorauszusetzen ist. Bezeichnet man durch  $\rho_0$  die Dichtigkeit der Flüssigkeit bei  $0^\circ \text{C.}$ , so ist

$$(2) \quad \rho = \frac{\rho_0}{\varphi(t)},$$

wo  $\varphi(t)$  eine unbekannte Function der Temperatur bedeutet, die eben aufzufinden ist, und welche nichts anderes als die gesuchte thermische Ausdehnung der Flüssigkeit darstellt, und zwar für den Fall, dass dieselbe unter dem Drucke ihrer eigenen gesättigten Dämpfe sich befindet.

Von den Aenderungen des Volumens  $V$  des Versuchsrohres wollen wir zunächst absehen.<sup>1)</sup> Dann wird beim allmählichen und fortgesetzten Erwärmen im allgemeinen Folgendes eintreten: Das Flüssigkeitsvolumen wird sich allmählich vermehren ( $dv_1/dt > 0$ ), wobei zugleich eine gewisse Menge Substanz aus dem flüssigen in den dampfförmigen Zustand übergehen wird. Je höher die Temperatur, desto grösser wird diese verdampfende Menge. Erwärmt man die ganze Masse noch weiter, so wird diejenige Temperatur  $t_m$ , die eben zu notiren ist, eintreten, bei welcher dieses Verdampfen die thermische Ausdehnung vollständig compensirt, wobei also das Flüssigkeitsniveau seine höchste Stelle im Versuchsrohr einnimmt ( $dv_1/dt = 0$ ). Lässt man die Temperatur noch weiter steigen, so übernimmt die Verdampfung die leitende Rolle, und die Trennungsfläche zwischen Flüssigkeit und Dampf fängt an zu sinken ( $dv_1/dt < 0$ ). Man erhält auf diese Weise zwei zugehörige Werthe von  $\Delta$  und  $t_m$ . Durch abwechselnde Erwärmung und Abkühlung des

1) Diese Aenderungen sind nicht schwer zu berücksichtigen.



Versuchsrohres in der Nähe von  $t_m$  kann man sich rasch ein nzes System von Werthen von  $\Delta$  und  $t_m$  verschaffen. Dabei id dieselben Vorsichtsmaassregeln zur Elimination der Tem- raturdifferenz zwischen Flüssigkeit und äusserer Hülle, die i der Bestimmung der Dichtigkeit der gesättigten Dämpfe on besprochen worden sind, ebenfalls zu treffen.

Wiederholt man dieselben Versuche für andere Werthe n  $\Delta$ , so bekommt man andere  $t_m$ , was uns in den Stand izt, den Gang der unbekannten Function  $\varphi(t)$  zu bestimmen, e es aus der Theorie dieser Versuche leicht zu erkennen ist.

Die Temperatur  $t_m$  muss in der That der folgenden Be- gung genügen:

$$\frac{d v_1}{d t} = 0.$$

in ist

$$v_1 = (Q - q) \frac{1}{\varrho}.$$

$$V = v_1 + v = (Q - q) \frac{1}{\varrho} + q \cdot \frac{1}{\delta}.$$

aus

$$Q - q = \varrho \frac{Q - V \delta}{\varrho - \delta},$$

er wegen (1)

$$Q - q = V \varrho \frac{\Delta - \delta}{\varrho - \delta}.$$

tzten wir das in (4) ein, so folgt wegen (2)

$$v_1 = V \frac{\Delta - \delta}{\frac{\varrho_0}{\varphi(t)} - \delta}.$$

Die Formel (3) führt jetzt unmittelbar auf folgende Be- gungsgleichung:

$$\frac{\frac{d \varphi}{d t}}{\varphi(1 - \kappa \varphi)} - \frac{\frac{d \delta}{d t}}{\Delta - \delta} = 0.$$

erin bedeutet  $\kappa$  das Verhältniss  $\Delta / \varrho_0$ . Diese Grösse hat gleich einen sehr einfachen physikalischen Sinn. Da  $\delta$  bei 0° allgemeinen sehr klein ist, so bedeutet  $\kappa$  denjenigen Bruch- eil des ganzen Volumens  $V$ , welcher bei 0° C. von der lüssigkeit eingenommen wird.

Wenn man die beschränkende Annahme von der Constanz von  $V$  fallen liesse, so würde man statt (6) auf eine Gleichung von der folgenden Form geführt:

$$(7) \quad \frac{d\varphi}{dt} + A_t \varphi + B_t \varphi^2 = 0,$$

wo  $A_t$  und  $B_t$  ebenfalls bekannte Functionen der Temperatur sind. Man kann aber die Aenderungen von  $V$ , da sie immer sehr klein sind, noch in einfacher Weise berücksichtigen.

Lassen wir jedoch die Gleichung (7) bei Seite und beschränken wir uns nur auf die Besprechung der Gleichung (6).

Wenn die Function  $\varphi$  bekannt wäre, würde Gleichung (6) uns diejenige Temperatur liefern, bei welcher für ein gegebenes  $\Delta$  das Flüssigkeitsniveau seine höchste Stelle im Versuchsrohre erreicht. In unserem Falle aber kennen wir aus den Beobachtungen die zugehörigen Werthe von  $\Delta$  und  $t_m$ . Um daraus die thermische Ausdehnung der zu untersuchenden Flüssigkeit zu erhalten, braucht man nur für  $\varphi$  irgend eine von den vielen vorgeschlagenen Functionen anzunehmen, die die Ausdehnung von Flüssigkeiten darstellen sollen. Man nehme entweder eine einfache parabolische Formel mit zwei oder drei Constanten, die jedoch nur in einem bestimmten Temperaturintervall angewandt werden darf, oder noch besser, die Avenarius'sche Formel<sup>1)</sup>

$$\varphi(t) = a - b \log(t_k - t),$$

wo  $t_k$  die kritische Temperatur bedeutet.

Jedes Paar zugehöriger Werthe von  $\Delta$  und  $t_m$  gibt uns dabei wegen der Formel (6) eine Bedingungsgleichung, welche unmittelbar zur Bestimmung einer von den in der Ausdehnungsformel vorkommenden Constanten verwerthet werden kann. Je mehr Beobachtungen gemacht sind, desto vollständiger wird man den Gang der Function  $\varphi$ , d. h. die Ausdehnung der Flüssigkeit, bei hohen Temperaturen kennen.

Ich möchte noch bemerken, dass die Gleichung (6) sich unmittelbar integrieren lässt. Man wird dabei auf eine Function

1) Avenarius, Bull. de l'acad. imp. des scienc. de St. Pétersbourg. 24. p. 525—533; Mém. phys. et chim. 10. p. 697. 1877; Beibl. 2. p. 211. 1878.



Flüssigkeit dienen, indem man die Temperatur noch weiter steigen lässt, nach der früher besprochenen Methode auch Dichtigkeit des gesättigten Dampfes liefern können.

Hat man den Gang der Functionen  $\rho$  und  $\delta$  vollständig untersucht, so kann man noch die folgende Frage lösen. Man trage die Flüssigkeits- und Dampfcurve auf ein Coordinatennetz auf und suche nach dem Punkte, wo beide Curven schneiden. Man erhält daraus die kritische Temperatur und die kritische Dichte.<sup>1)</sup>

Moskau, Physik. Labor. der Universität.

---

1) Vgl. Cailletet u. Mathias, Journ. de phys. (2) 6. p. 414. 1876; Amagat, Journ. de phys. (3) 1. p. 288. 1892; Mathias, Compt. rend. 115. p. 35. 1892 u. a.



geschwindigkeit des Lichtes bedeutet.  $2Q/V$  stellt dabei die in der Volumeneinheit enthaltene Energie dar. Ob dieselbe sich so einfach berechnen lässt, ist ohne weiteres nicht einleuchtend. Für den Fall eines Cylinders stellt jedenfalls das Product aus der jeden normalen Cylinderschnitt treffenden Energiemenge mit  $2/V$  nicht die in der Volumeneinheit enthaltene Energie dar, wie wir später in der That sehen werden. Schon Boltzmann<sup>1)</sup> bemerkte, dass Bartoli den Einfluss der Seitenstrahlen nicht mit berücksichtigt zu haben scheint.

Nun sagt Bartoli weiter: da die innere Kugel ihre Energie um  $q$  vermehrt hat, so muss dabei eine dieser Energie gleiche Arbeit  $P \cdot 4\pi \cdot R^2 \delta R$  geleistet werden. Es folgt daraus

$$P = \frac{2}{3} \frac{Q}{V}.$$

Dieser Schluss scheint mir nicht richtig zu sein, obgleich das Endresultat, welches man, wenn man die Sache anders behandelt, erhält, sich von der Bartoli'schen Formel nur durch einen constanten Factor unterscheidet. Unser System besteht nämlich jetzt aus der innern schwarzen Kugel und dem zwischen den beiden Kugeln vorhandenen Raum, welcher ebenfalls einen Vorrath von Energie besitzt.<sup>2)</sup> Es soll bei Verkleinerung der äusseren Hülle Arbeit geleistet werden, nicht etwa weil die Energie des absolut schwarzen Körpers sich dabei vermehrt hat, — denn alles was die innere Kugel an Energie gewinnt, ist dem zwischen den beiden Kugeln liegenden Raume entzogen, — sondern weil die in dem ganzen System vorhandene Energie dabei von einer niedrigen zu einer höheren Temperatur übergeht.

Boltzmann<sup>3)</sup> hat sich ebenfalls mit dieser Frage beschäftigt. Bedeute  $E$  die in der Zeiteinheit von der Flächeneinheit ausgestrahlte Wärme (Boltzmann bezeichnet sie mit  $q(t)$ ), so findet er für den Lichtdruck  $P$  auf eine absolut reflectirende Wand den folgenden Ausdruck

1) Boltzmann, Wied. Ann. **22**. p. 35. 1884.

2) Vgl. Thomson, Compt. rend. **39**. p. 529. 1854; Phil. Mag. (4) **9**. p. 36. 1855.

3) Boltzmann, l. c.



der Zeiteinheit ausgestrahlte Wärmemenge  $E$  zu bekommen, brauchen wir nur folgendes Integral zu bilden <sup>1)</sup>:

$$(1) \quad E = 2 \pi \varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \pi \varepsilon,$$

$\varepsilon$ , ebenso wie  $E$ , sind dabei nur Functionen der absoluten Temperatur  $T$ .<sup>2)</sup>

Berechnen wir jetzt die Energiemenge „ $e$ “ in der Volumeneinheit unseres Cylinders, wenn die schwarze Fläche  $A$  die Temperatur  $T$  hat. Denken wir uns zuerst den Cylinder als unbegrenzt nach rechts, und bedeute  $e'$  die in diesem Falle in der Volumeneinheit enthaltene Energiemenge.

Es ist offenbar

$$(2) \quad e = 2 e'.$$

Würde unsere Fläche die ganze Energiemenge  $E$  in normaler Richtung aussenden, so hätte man

$$e' = \frac{E}{V}$$

oder

$$e = \frac{2 E}{V}.$$

In der That aber wird die Wärmemenge  $2 \pi \varepsilon \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$  unter einem Winkel, der zwischen  $\varphi$  und  $\varphi + d\varphi$  liegt, ausgestrahlt. Die Geschwindigkeit  $V_\varphi$ , mit welcher diese Energie sich parallel der Cylinderaxe fortpflanzt, ist den Reflexionsgesetzen zufolge, gleich  $V \cos \varphi$ . Die Energiemenge in der Volumeneinheit wird also grösser sein, und zwar ist beim Eintreten des Beharrungszustandes

$$e' = 2 \pi \varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{V_\varphi} d\varphi = 2 \pi \varepsilon \frac{1}{V} = \frac{2 E}{V}$$

oder wegen (2)

$$(3) \quad e = \frac{4 E}{V},$$

$e$  ist ebenfalls nur eine Function von  $T$  (Kirchhoff).  $E$  be-

1) Vgl. z. B. Wüllner, Lehrb. der Exp.-Phys. 3. p. 238. 4. Aufl. 1885.

2) Vgl. Kirchhoff, Pogg. Ann. 109. p. 275. 1860.



utet die Energiemenge, die durch jeden Cylinderschnitt in r Zeiteinheit in einer Richtung hindurchgeht. Um nun die der Volumeneinheit enthaltene Energie zu bekommen, muss n, wie man sieht, dieselbe nicht etwa mit  $2/V$ , sondern t  $4/V$  multipliciren. (Vgl. Einleitung.)

Sei  $P$  der auf die Grundfläche  $B$  ausgeübte Druck, so ist

$$P = T \int_0^T \frac{1}{T} \frac{de}{dT} dT - e.$$

### Erster Beweis.

Liege der Stempel  $B$  unmittelbar bei  $A$  an, und behalte zunächst die constante Temperatur  $T$ . Man bewege dann n Stempel  $B$  äusserst langsam um die Strecke  $h$ . Die dem ystem zugeführte Wärme, wenn  $A$  etc. eine verschwindende asse besitzt, sei  $Q$ .

$$Q = e h + Ph.$$

Alle auf Wärme sich beziehenden Grössen sind in mechanischen Einheiten ausgedrückt.

Bringe man jetzt  $A$  allmählich auf die Temperatur 0, o wird alle Energie aus dem Cylinder auf andere Körper bergehen. Ist das geschehen, so schiebe man  $B$  ohne Arbeitsleistung zu  $A$  wieder zurück. Der Vorgang ist umkehrbar, und da  $A$  eine verschwindende Masse besitzt, so liefert uns der zweite Hauptsatz die folgende Gleichung:

$$\frac{Q}{T} = \int_0^T \frac{dQ}{T}$$

$$4) \quad \frac{e + P}{T} \cdot h = \int_0^T \frac{h}{T} \frac{de}{dT} dT$$

oder

$$5) \quad P = T \int_0^T \frac{de}{dT} dT - e,$$

was zu beweisen war.

Diese Formel unterscheidet sich jedoch durch einen constanten Factor von der Boltzmann'schen. Es wäre nämlich, wenn man  $e$  durch seinen Werth aus (3) ersetzte,

$$(6) \quad P = \frac{4}{V} \left[ T \int_0^T \frac{1}{T} \cdot \frac{dE}{dT} dT - E \right].$$

Nach Boltzmann dagegen

$$(6') \quad P = \frac{\pi}{V} \left[ T \int_0^T \frac{1}{T} \frac{dE}{dT} dT - E \right]$$

### *Zweiter Beweis.*

Sei  $B$  schon um die Strecke  $h$  verschoben, und befinde sich  $A$  bei der Temperatur  $T$ . Nehmen wir als unabhängige Variablen  $T$  und  $h$ .

Es fragt sich nun, wie viel Wärme  $dQ$  man dem System zuführen muss, wenn  $T$  sich um  $dT$  und  $h$  um  $dh$  vermehrt. Die geleistete Arbeit ist dabei  $P dh$ . Es ist

$$dQ = d(h e) + P dh$$

oder

$$dQ = (e + P) dh + h \frac{de}{dT} dT.$$

Die Vermehrung der Entropie  $dS$  wird also

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{e + P}{T} dh + \frac{h}{T} \frac{de}{dT} dT.$$

Hieraus, aus dem zweiten Hauptsatze, nach dem  $dS$  ein vollständiges Differential sein soll, und da  $e$  nur eine Function von  $T$  ist, folgt

$$(7) \quad \frac{dP}{dT} - \frac{P}{T} = - \frac{e}{T}.$$

Diese Gleichung ist eine unmittelbare Folge der Gleichung (4). aus welcher sie durch Differentiation entsteht. Integriert man Gleichung (7), so findet man

$$P = T \left[ C + \int_0^T \frac{e}{T^2} dT \right]$$

oder

$$(8) \quad P = T \left[ C_1 + \int_0^T \frac{1}{T} \frac{de}{dT} dT \right] - e.$$



den Stempel  $B$  ohne Arbeitsleistung zu  $A$  zurückschieben, oder  
 2. den schwarzen Körper bei der constanten Temperatur  $T_1$  halten und dann den Stempel  $B$  unter dem constanten Druck  $P_2$  zu  $A$  zurückbringen (Vorgang von Boltzmann). Der letzte Process besteht in der Erwärmung von  $A$  auf  $T_1$ ; wir setzen aber seine Masse als verschwindend klein voraus. In beiden Fällen ist der Kreisprocess umkehrbar. Der zweite Hauptsatz liefert uns also, noch mit Rücksicht auf Formel (4), das folgende Gleichungssystem:

$$(11) \quad \frac{e_1 + P_1}{T_1} h_1 = h_1 \int_0^{T_1} \frac{1}{T} \frac{de}{dT} dT = \frac{e_2 + P_2}{T_2} h_2 = h_2 \int_0^{T_2} \frac{1}{T} \frac{de}{dT} dT.$$

Es folgt daraus

$$\frac{e_2 + P_2}{T_2} h_2 - \frac{e_1 + P_1}{T_1} h_1 = 0$$

oder

$$d\left(\frac{e + P}{T} \cdot h\right) = 0$$

$$d(eh) + Pdh + h dP - \frac{h}{T}(e + P) dT = 0,$$

oder wegen (10')

$$\frac{dP}{dT} - \frac{P}{T} = \frac{e}{T}.$$

Wie kehren auf diese Weise zur Gleichung (7) zurück.

Gleichung (10') setzt uns in den Stand, die Beziehung zwischen  $T$  und  $h$  für adiabatische Vorgänge aufzufinden.

Da  $e$  und folglich auch  $P$  nur Functionen von  $T$  sind, so folgt aus (10')

$$(12) \quad h \frac{dT}{dh} = - \frac{e + P}{\frac{de}{dT}}$$

oder wegen (7)

$$(13) \quad h \frac{dT}{dh} = - T \frac{\frac{dP}{dT}}{\frac{de}{dT}}.$$

Man erhält diese Formel auch durch Vergleichung der zwei Integrale in Gleichung (11).



ausgesandt werden. Den Gesetzen der Reflexion zufolge werden sie unter demselben Winkel die andere Grundfläche  $B$  unseres *geraden* Cylinders treffen, was auf der Figur schematisch dargestellt ist. Die Menge der unter dem Winkel  $\varphi$  ausgestrahlten Energie ist gleich

$$dE = 2\pi\epsilon \sin\varphi \cos\varphi d\varphi \cdot s.$$

Wir können uns denken, das alle diese Strahlen dieselbe Richtung haben. Sie üben auf „ $ab$ “ oder auf „ $a'b'$ “, welche senkrecht zu ihrer Fortpflanzungsrichtung stehen, einen gewissen Druck  $dp'$  aus, welcher gleich  $dE/ab \cdot V$  sein soll.

Da  $ab = s \cos\varphi$  ist, so folgt

$$dp' = \frac{2\pi\epsilon}{V} \sin\varphi d\varphi.$$

Jedem Flächenelement von  $a'b'$  entspricht ein Flächenelement von  $B$ , welches um  $1/\cos\varphi$  grösser ist. Deshalb ist die Kraft, welche auf die Flächeneinheit von  $B$  wirkt, um  $\cos\varphi$  mal kleiner als  $dp'$ . Ausserdem bildet diese Kraft den Winkel  $\varphi$  mit der Normale zu  $B$ . Es folgt daraus, dass der auf  $B$  ausgeübte Druck

$$dp = dp' \cos^2\varphi$$

ist. Ist  $B$  eine absolut reflectirende Wand, so muss man, um den ganzen Druck zu erhalten, den vorigen Ausdruck mit 2 multipliciren und über alle Werthe von  $\varphi$ , von  $\varphi = 0$  bis  $\varphi = \pi/2$ , integriren.

$$P = 2 \frac{2\pi\epsilon}{V} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi d\varphi,$$

oder wegen (3)

$$(14) \quad P = \frac{1}{3} e.$$

Formel (14) stellt die gesuchte Beziehung dar.

Wir sehen in der That, dass  $P$  zu  $e$  proportional ist. Ersetzen wir mittels (14)  $P$  durch  $e$  in Formel (7), so folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (1) und (3)

$$\frac{d\epsilon}{dT} = \frac{4\epsilon}{T}$$

oder

$$(15) \quad \epsilon = AT^4.$$



leicht durch Integration nach  $\varphi$ ). Gehe man von der Betrachtung der allgemeinen Gleichungen für das electromagnetische Feld aus, so muss die in einem Punkte wirkende electriche Kraft  $F_n$ , welche einer bestimmten Schwingungszahl entspricht, eine periodische Function der Zeit sein. Sei die entsprechende Amplitude  $a_n$ . Hätte man eine constante Kraft, so wäre die in der Volumeneinheit enthaltene Energie

$$(19) \quad w = \frac{1}{8\pi} k F^2,$$

wo  $k$  die Dielectricitätsconstante des äusseren Mediums bedeutet.

In unserem Falle ist aber  $F$  variabel. Jedem  $F_n$  entspricht dabei eine besondere Dielectricitätsconstante  $k_n$ , doch ist die in der Volumeneinheit enthaltene Energie für diese besonderen Schwingungen offenbar proportional zu  $a_n^2$ . Da  $k$  für alle Schwingungen im Vacuum gleich 1 zu setzen ist, so ergibt sich die ganze in der Volumeneinheit enthaltene Energie  $e$ , als eine Summe von der folgenden Form:

$$e = \text{const.} \sum a_n^2,$$

wo  $n$  auf alle diejenigen Schwingungen, welche unser Körper bei der Temperatur  $T$  auszusenden vermag, auszudehnen ist.

$a_n^2$  ist eine Function von  $T$  und  $n$ .

$$(20) \quad a_n^2 = f(T, n).$$

Die Function  $f$  hängt unmittelbar von der Vertheilung der Energie im normalen Spectrum ab, wo ich unter Spectrum die Gesammtheit aller Schwingungen verstehe.

Ist die Energie in continuirlicher Weise im Spectrum vertheilt, so verwandelt sich das vorige Summationszeichen in ein Integralzeichen.

Bedeutet  $\varphi(n) dn$  die Wahrscheinlichkeit, solche Strahlen zu treffen, deren Schwingungszahl zwischen  $n$  und  $n + dn$  liegt, so folgt:

$$(21) \quad e = \text{const.} \int_0^\infty f(n, T) \cdot \varphi(n) dn.$$

Für einen absolut schwarzen Körper, der also keine selective Absorption besitzt, ist  $\varphi(n)$  wohl constant zu





§ 4. Abhängigkeit des Strahlungsvermögens von dem umgebenden Medium.

Setzen wir jetzt voraus, dass unser bestrahlter Cylinder irgend einen diathermanen Körper enthält, dessen Dielectricitäts-constante für die betreffenden Schwingungen gleich  $k_n$  sei. Da die Temperatur dieselbe ist, so haben wir auch jetzt dieselben Schwingungen wie im vorigen Falle, nämlich von  $n = 0$  bis  $n_m = \omega(T)$ .

Gleichung (19) lehrt uns, dass die durch jeden Querschnitt des Cylinders hindurchgehende Energie für jede besondere Strahlenart um  $k_n$  mal grösser wird, indem das äussere Medium ebenfalls an dem Schwingungszustande theilnimmt. Da ausserdem die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $V_n$  jeder Gattung von Strahlen kleiner ist als im Vacuum, so wird für jede Strahlenart die in der Volumeneinheit vorhandene Energie um  $k_n V/F_n$  mal grösser. Bedeutet  $e_k$  die totale in der Volumeneinheit enthaltene Energie, so folgt, wie im § 3, dass

$$(23) \quad e_k = \text{const.} \int_0^{n_m = \omega(T)} k_n \frac{V}{V_n} f(n, T) q(n) dn,$$

Die Constante behält dabei denselben Werth wie in der Gleichung (21), welche also nur als ein specieller Fall dieser allgemeinen Gleichung (23) zu betrachten ist.

1882; 95. p. 433. 1882; 97. p. 689 u. 732. 1883; Lecher, Wied. Ann. 17. p. 477. 1882; Christiansen, Wied. Ann. 19. p. 267. 1883; Schleiermacher, Wied. Ann. 26. p. 287. 1885; Bottomley, Beibl. 10. p. 569. 1886; H. Weber, Wied. Ann. 32. p. 256. 1887; Mathem.-naturw. Mitth. aus den Sitzungsber. d. Berl. Akad. 39. p. 933 u. 565. 1888; Beibl. 14. p. 897. 1890; Kövesligethy, Wied. Ann. 32. p. 699. 1887; Astr. Nachr. Nr. 2805. p. 329. 1887; Abh. der ungar. Akad. der Wiss. 12. Nr. 11; Mathem. u. naturw. Berichte aus Ungarn. 4. p. 9. 1887; 5. p. 20. 1887; 7. p. 24. 1889; Beibl. 12. p. 346. 1888; 14. p. 116. 1890; W. Michelson. Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. (4) 19. p. 79. 1887; (6) 21. p. 87. 1889; Journ. de phys. (2) 6. p. 467. 1887; Beibl. 14. p. 277. 1890; Emden. Wied. Ann. 36. p. 214. 1889; Graetz, Wied. Ann. 36. p. 857. 1889; Lord Rayleigh, Phil. Mag. 27. p. 460. 1889; Ferrel, Sill. Journ. (3) 39. p. 137. 1890; Beib. 14. p. 981. 1890; Edler, Wied. Ann. 40. p. 531. 1890; Violle, Compt. rend. 114. p. 734. 1892; Journ. de phys. (3) 1. p. 298. 1892 u. a.



Die früher aufgestellten Gleichungen gestatten dasselbe Verhältniss für endliche adiabatische Verschiebungen zu berechnen. Es stellt sich dabei heraus, dass dieses Verhältniss nur Function der Anfangs- und Endtemperatur ist.

Aus derselben Gleichung (10') geht hervor, dass, wenn wir eine gewisse Energiemenge auf eine kleinere Aethermasse concentriren wollen, dies nur unter Verwendung äusserer Arbeit geschehen kann, wobei der erste Hauptsatz fortwährend seine Gültigkeit behält. Hierin ist die Bedeutung des zweiten Hauptsatzes näher zu erkennen.

Aus den Gleichungen (10) und (9) finden wir für eine endliche Verschiebung

$$(24) \quad e_1 h_1 - e_2 h_2 = \tau = U_1 - U_2.$$

$U_1$  und  $U_2$  bedeuten die Energiemenge im Cylinder am Anfang und Ende des Vorganges.

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (14), (16) und (17) folgt, dass

$$(25) \quad e h = 3 C C_1^3 T.$$

Setzen wir dies in (24) ein und bemerken dabei, dass  $3 C C_1^3$  aus der Anfangsbedingung sich bestimmen lässt, so folgt

$$\tau = \frac{U_1}{T_1} (T_1 - T_2).$$

Die verwendbare Arbeit ist also dem Temperaturgefälle direct proportional (zweiter Hauptsatz). Nur für den Fall, dass  $T_2 = 0$  ist, d. h. für den Fall, dass die gegebene Energiemenge  $U_1$  sich auf eine  $\infty$  grosse Aethermasse vertheilt (da wegen (17) nur für  $h = \infty$ ,  $T = 0$  ist), kann der ganze Vorrath von Energie in äussere Arbeit verwandelt werden.

Vergleichen wir noch zum Schlusse die vorhandenen Energiemengen am Anfang und Ende eines adiabatischen und *umkehrbaren* Vorganges miteinander. Es ist

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{e_1 h_1}{e_2 h_2},$$

oder wegen (25) und (17)

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{h_1}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{h_2}}}.$$



## IX. *Notiz über Wasserfallelectricität; von J. Elster und H. Geitel.*

---

Anknüpfend an die kürzlich in diesen Annalen erschienene Abhandlung von Hrn. Lenard: „Ueber die Electricität der Wasserfälle“<sup>1)</sup> theilen wir im Folgenden einige Beobachtungen mit, die wir in den beiden letzten Jahren an Wasserfällen der Alpen angestellt haben, und durch welche das interessante Ergebniss der genannten Untersuchung, dass nämlich für die Electricitätserregung durch fallendes Wasser das positive Potentialgefälle über der Erdoberfläche nicht wesentlich ist, durchaus bestätigt wird.

Durch electroskopische Beobachtungen in der Kitzlochklamm bei Rauris im Juli vorigen Jahres, die uns, wie Hrn. Lenard, die starke Electricitätsentwicklung in dieser von dem electrischen Kraftfelde der Erde nahezu abgeschlossenen Schlucht zeigten, waren in uns Zweifel an der Richtigkeit der bis dahin auch von uns angenommenen Anschauung rege geworden, dass die Wasserfallelectricität wesentlich als Folge der normalen Electrisirung der Erdoberfläche aufzufassen sei. Immerhin schienen uns diese Beobachtungen an einem Wasserlaufe, der in seinem oberen Theile als in electrischer Beziehung nicht ausreichend geschützt betrachtet werden könnte, wegen der Möglichkeit einer Convection der electrischen Massen von den höher gelegenen Stufen des Falles zu den tieferen nicht unbedingt gegen jene Annahme entscheidend zu sein. Versuche an künstlichen Tropfenfällen (von Brunnenwasser) hatten zu keinem sicheren Resultate geführt. Zur weiteren Klärung der Frage nahmen wir daher für den Juli dieses Jahres die Untersuchung der electrischen Eigenschaften *vollständig unterirdisch* fliessender Wasserläufe in Aussicht. Wir wählten dazu die Fälle der Reka in den Höhlen von St. Canzian bei Triest.

---

1) Lenard, Wied. Ann 46. p. 584. 1892.

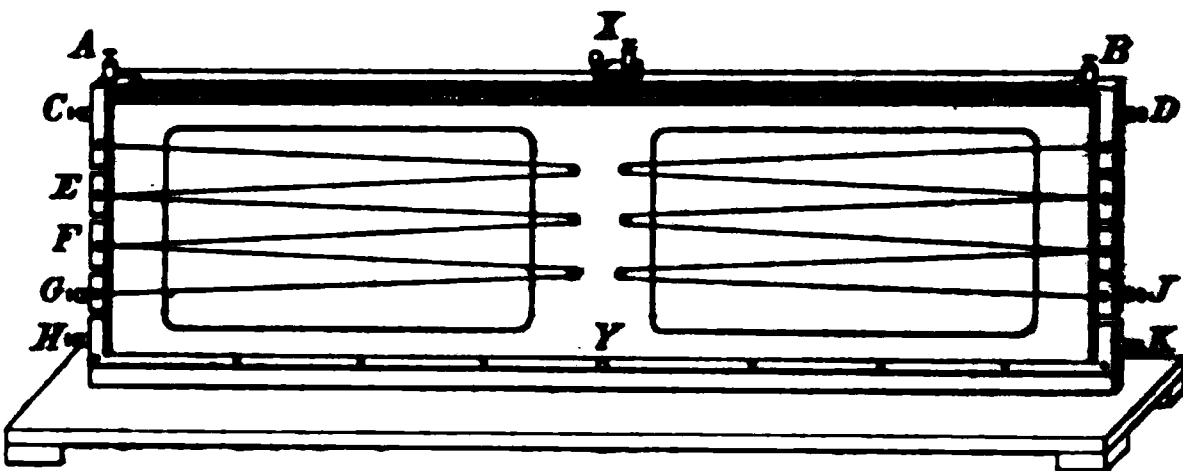


## **X. Apparat zur Demonstration der Wheatstone'schen Brückenordnung; von A. Oberbeck.**

Bei dem Elementarunterricht in der Physik, sowie bei Experimentalvorlesungen leitet man gern die vorzuführenden Hauptgesetze aus Versuchen ab und lässt dann erst den Beweis durch Rechnung folgen.

Dementsprechend dient der hier zu beschreibende Apparat dazu:

1. Das Fundamentalgesetz der Wheatstone'schen Brücke aus einfachen und anschaulichen Versuchen zu folgern,



2. Messungen mit einer für die Vorlesung hinreichenden und wohl noch darüber hinausgehenden Genauigkeit auszuführen.

Derselbe ist so construiert, dass alle zu der eigentlichen Stromverzweigung gehörenden Theile (also mit Ausnahme der Kette und des Galvanometers) an einem verticalen Brette angebracht sind, sodass dieselben auch aus grösserer Entfernung sofort deutlich übersehen werden können. Auf der oberen Kante des Brettes ist zwischen den Klemmschrauben A und B der Messdraht (von 1 m Länge) ausgespannt (vgl. Figur). In einer Vertiefung der Kante verschiebt sich der Contact X, an welchem der Galvanometerdraht befestigt ist. Ein einarmiger Hebel drückt den Draht gegen eine Schneide. Die Stellung derselben kann durch einen Zeiger an einer vorn angebrachten, gröberen Theilung abgelesen werden, während ein zweiter Zeiger dem Experimentirenden gestattet, eine genaue Ablesung





schaft der Klemmschrauben auf beiden Seiten bedarf man nur ganz kurzer Verbindungsdrähte.

4. Wird die Kette in *G* und *J* angehängt, so kann man durch Einschaltung beliebiger Stücke der Seitendrähte den Messdraht gewissermaassen nach der einen oder anderen Seite verlängern und überhaupt seinen Widerstand ungefähr um das Sechsfache vergrossern. Selbstverständlich kann der Apparat auch zu manchen anderen Anwendungen, z. B. zur Stromverzweigung und zur Vergleichung electromotorischer Kräfte verwandt werden.

Greifswald, 10. August 1892.

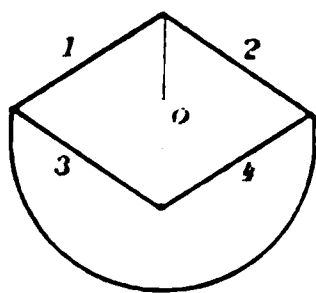
---



benutzt hat, nur um eine kleine Grösse; ob dieselbe indess vernachlässigt werden dürfe, darüber kann schliesslich nur der Versuch entscheiden.

Zur Prüfung beider Punkte sowie der Genauigkeit und Zuverlässigkeit der Oberbeck'schen Methode überhaupt habe ich nach ihr eine Anzahl von Messungen durchgeführt, bei welchen ich nach dem Beispiele Hrn. Puluj's Rollen benutzte, deren Form die Berechnung des Selbstinductionscoefficienten nach der Maxwell-Stefan'schen<sup>1)</sup> Formel gestattete. Als Resultat ergab sich, dass in den drei von mir untersuchten Fällen von einer Condensatorwirkung der Rollen abgesehen werden konnte, dass dagegen die Vernachlässigung der Selbstinduction in der beweglichen Rolle Fehler verursachte, welche in einzelnen Fällen bis 20 Proc. gingen. Andererseits stimmten die aus den Beobachtungen nach der *corrigirten* Oberbeck'schen Formel berechneten Werthe bei ungefähr 200 Stromwechseln pro Secunde — denselben Verhältnissen, unter welchen Hr. Puluj beobachtete — bei kleineren Selbstinductionscoefficienten bis auf 0,6 Proc., bei grösseren bis auf 1,1 Proc. mit der Theorie überein, Resultate, welche dieser Methode zumal für kleine Werthe ein Uebergewicht über ähnliche zu verleihen scheinen.

*Ableitung der Formel.* In der gezeichneten Wheatstone'schen Brücke enthalte der Hauptzweig einen Sinusströme liefernden Inductionsapparat und die feste Rolle des Electrodynamometers, der Zweig 0 die lose Rolle desselben mit dem Selbstinductionscoefficienten  $L_0$ . In Zweig 1 befinde sich die auf ihren Coefficienten  $L_1$  zu untersuchende Inductionspirale; die Zweige 2, 3 und 4 seien inductionslos. Capacitäten seien nirgend vorhanden. Nach Kirchhoff gelten dann zu einer beliebigen Zeit die Gleichungen



$$i_1 w_1 + i_0 w_0 - i_3 w_3 = -L_0 \frac{d i_0}{d t} - L_1 \frac{d i_1}{d t} \quad J = i_1 + i_3 = i_2 + i_4$$

$$i_0 w_0 + i_4 w_4 - i_2 w_2 = -L_0 \frac{d i_0}{d t} \quad i_1 = i_0 + i_2.$$

Zur Integration setzt man nach Oberbeck am bequemsten zuerst für die momentane Intensität des Hauptstromes  $J = e^{i \pi n t}$

1) Stefan, Wien. Ber. 88. p. 1201. 1883.



Das negative Glied auf der rechten Seite ist dasjenige, welches der Oberbeck'schen Formel fehlt.

*Apparate und Vorversuche.* Als Versuchsobject diente mir eine aus mehreren Stücken zusammengeleimte, dicke, kreisförmige Holzscheibe, welche ich mir nach den von Hrn. Sahulka<sup>1)</sup> angegebenen Dimensionen anfertigen liess. Sie hatte einen Durchmesser von 50 cm; in ihrem Rande befand sich eine genau 2 cm breite Nuth von rechteckiger Gestalt, welche zur Aufnahme des Drahtes bestimmt war. Den inneren Radius der Nuth bestimmte ich in der Weise, dass ich einen Streifen Telegraphenpapier, welcher durch ein Gewicht gespannt war, bis zum Uebereinandergreifen der Enden darin aufwickelte; ein feiner Nadelstich markirte dann zwei genau übereinander liegende Punkte. Der Streifen wurde unter gleicher Belastung horizontal ausgespannt und die Entfernung der beiden Marken gemessen. Das Verfahren, welches mehreremal wiederholt wurde, ergab eine schwach konische Gestalt der Grundfläche. Doch betrug die Differenz der gemessenen Radien weniger als 0,01 cm. In die Nuth wurden sodann unter straffem Anziehen zunächst 16 Lagen besponnenen Kupferdrahtes zu je 25 Windungen hineingebracht. Die 25. Windung jeder Lage musste jedesmal hineingepresst werden, wodurch sich erst die Lage der übrigen Windungen regulirte. Nachdem hierauf in gleicher Weise wie vorher der äussere Radius der Drahtrolle bestimmt war, wurden noch weitere acht Lagen zu je 25 Windungen von derselben Drahtsorte ebenso darüber gewickelt und wieder der Umfang gemessen. Die Enden der beiden Spiralen führten zu vier direct in das Holz der Rolle geschraubten Klemmen. Auf diese Weise standen mir im ganzen drei Rollen von genau bekannten Dimensionen zur Verfügung. Im Folgenden seien die oberen 200 Windungen mit „Rolle I“, die unteren 400 mit „Rolle II“, beide hintereinander geschaltet mit „Rolle III“ bezeichnet. — Ein erster Versuch ergab hinlängliche Isolation der Windungen voneinander.

Die Maxwell-Stefan'sche Formel zur Berechnung der Selbstinductionscoefficienten einer kreisförmigen Drahtrolle mit

---

1) Sahulka, Electrotechn. Zeitschr. p. 371. 1891.



schen Brücke, deren Zweige 3 und 4 durch einen gespannten Draht gebildet wurden, zu welchem sich je nach Bedürfniss beiderseits 10 resp. 100 S. E. zuschalten liessen; in Zweig 2 lag ein Stöpselrheostat, dessen Widerstand möglichst gleich dem der Rolle gewählt wurde. In der Brücke befand sich ein ballistisches Galvanometer Wiedemann'scher Form. Seine Rollen hatten zusammen ca. 5000  $\Omega$  Widerstand; die Masse des Ringmagneten war durch ein kleines angehängtes Bleigewicht passend vergrössert. Vertical unter demselben konnte ein Compensationsmagnet beliebig verstellt werden. Zur Beruhigung der Nadel diente eine weitere seitliche Rolle mit wenigen dickdrähtigen Windungen, deren Enden zu zwei auf einem stromdurchflossenen Drahte verschiebbaren Contacten führten, sodass die Stromstösse in ihr beliebig klein gemacht werden konnten. Als Stromgeber benutzte ich eine Batterie von sechs Accumulatoren mit vorgeschaltetem grossen Widerstande; eine Pohl'sche Wippe erlaubte die Umkehrung des Hauptstromes. — Bedeutet nun  $T$  die Schwingungszeit der Nadel,  $\lambda$  ihr natürliches logarithmisches Decrement,  $2\varepsilon$  den momentanen Ausschlag, mit welchem sich dieselbe bei Umliegen der Wippe aus ihrer Nulllage herausbewegt;  $r$  den Zuschlagwiderstand in Zweig 1,  $\alpha$  die durch ihn bewirkte dauernde Ablenkung der Nadel, so ist der Selbstinductionscoefficient der Rolle

$$L = \frac{T \left( 1 + \frac{\lambda}{2} \right) r \varepsilon}{\pi \alpha}.$$

Drei Versuche bei verschiedenen Intensitäten des Hauptstromes  $J$  ergaben folgende Resultate:

$T$ in Sec.	$1 + \frac{\lambda}{2}$	$J$ des Hauptstrom. i. Amp.	$2\varepsilon$	$\alpha$	$L$ in $10^9$ cm
4,394	1,00152	0,01	12,70	2,40	0,3745
4,382	1,00135	0,02	23,30	4,35	0,3780
4,393	1,00144	0,05	54,85	10,29	0,3772

Mittel 0,3766

Die Ausschläge  $2\varepsilon$  und  $\alpha$  sind dabei Mittel aus mehreren Beobachtungen.  $r$  war der 0,1  $\Omega$ -Widerstand eines Stöpselrheostaten aus Nickelin, welcher mit einer von der physikalisch-technischen Reichsanstalt geprüften 0,1-Einheit verglichen bei 22,5° C. gleich 0,1011  $\Omega$  war. Die Abweichung obigen Mittel-





*Hauptversuche.* Der Gang eines Versuches war der folgende: Zuerst wurden die beiden Rollen des Dynamometers möglichst senkrecht zu einander gestellt, wozu die Brücke selbst benutzt wurde: nachdem der Sinusinductor in Gang gesetzt war, wurde in Zweig 3 irgend ein passender Stöpsel gezogen und der Torsionsknopf des Dynamometers so lange regulirt, bis bei Umkehrung des Brückenstromes die Ausschläge in entgegengesetztem Sinne gleich gross wurden. Es war dies ziemlich zeitraubend, da an dem Electrodynamometer von Siemens & Halske eine mikrometrische Vorrichtung zu dieser Einstellung fehlt. — Dann wurde durch Veränderung von  $w_3$  die bewegliche Rolle in die Ruhelage gebracht und, sobald diese erreicht, das Zählwerk des Sinusinductors während der Dauer von 2000 bis 5000 Umdrehungen des Magneten eingeschaltet. Ein Umlegen der Wippe während dieser Zeit liess erkennen, ob sich die Nullstellung geändert habe. War dieses, wie es häufiger vorkam, der Fall, so wurde  $w_3$  für beide Stellungen der Wippe bestimmt und das Mittel genommen. Die eigentliche Messung, welche sich auf die Grössen  $w_3$  und  $n$  beschränkt, war in wenigen Minuten beendet.

Zur Berechnung des Selbstinductionscoefficienten  $L_1$  muss derjenige der Dynamometerrolle  $L_0$  bekannt sein. Da nun eine directe Bestimmung hiervon nach der Lord Rayleigh-Methode aus weiter unten zu erwähnenden Gründen nicht zum Ziele führte, so habe ich  $L_0$  aus einigen Beobachtungen der Tabelle I unter Benutzung des theoretischen Werthes von  $L_1$  und der oben abgeleiteten Formel als Mittelwerth berechnet: ich erhielt so  $L_0 = 0,0240 \text{ cm}^9$ . Dieser Werth ist allen übrigen Berechnungen zu Grunde gelegt; die weitere gute Uebereinstimmung in Tabelle I und namentlich in der ganz unabhängigen Tabelle II rechtfertigen jenen Werth.

In den folgenden drei Tabellen enthält die erste Spalte die Temperatur; die zweite die Anzahl  $m$  der Treibgewichte; die dritte die Zahl  $\nu$  der Secunden pro 1000 Touren des Magneten; die vierte die Anzahl  $n$  der Stromwechsel pro Secunde; die fünfte  $w_3$ ; die sechste und siebente die Coefficienten der quadratischen Gleichung für  $L_1$

$$q = \frac{(w_3 - w_1)(w' + w_1 + w_3)}{\pi^2 n^2} \quad p = L_0 \frac{w_3 + w_4}{w_0 + w_2 + w_4};$$



Die Abweichung vom theoretischen Werth beträgt 0,6 Proc. Die letzten Beobachtungen sind unter sehr ungünstigen Widerstandsverhältnissen gemacht, weshalb die Methode unempfindlich wird.

Tabelle III.

Rolle III.  $w_2 = w_4 = 93,7 \, \Omega$ ,  $w' = 81,4 \, \Omega$ .  
Theoretischer Werth von  $L_1 = 0,3738 \, \text{cm}^2$ .

$t$	$m$	$\nu$	$n$	$w_3$	$q$	$p$	Oberb.	$L_1$ in $10^3 \text{cm}$
20,3°	4	9,38''	213,2	252,0 $\Omega$	0,1559	0,0250	0,3947	0,3707
19,4°	4	9,175''	217,9	257,0 $\Omega$	0,1556	0,0254	0,3945	0,3699
19,4°	4	9,05''	221,0	260,0 $\Omega$	0,1551	0,0257	0,3939	0,3692
20,6°	5	8,04''	248,7	292,0 $\Omega$	0,1555	0,0279	0,3944	0,3675
20,3°	5	7,94''	251,8	296,4 $\Omega$	0,1565	0,0282	0,3956	0,3684
20,3°	5	7,89''	253,6	298,0 $\Omega$	0,1560	0,0283	0,3949	0,3676
20,6°	6	6,91''	289,2	340,0 $\Omega$	0,1565	0,0314	0,3956	0,3655
20,6°	6	6,87''	291,2	343,0 $\Omega$	0,1571	0,0316	0,3964	0,3661
20,6°	6	6,63''	301,4	354,0 $\Omega$	0,1562	0,0324	0,3952	0,3641
								Mittel 0,3665

Die Abweichung vom theoretischen Werth beträgt 1,95 Proc. und ist dieses Mal negativ.

Wie man sieht, stimmen die Resultate der beiden ersten Tabellen mit der Theorie so gut überein, wie dies überhaupt erwartet werden konnte, und beweisen damit die Richtigkeit der Voraussetzungen, unter welchen die Formel für  $L_1$  oben abgeleitet wurde; d. h. *eine Condensatorwirkung der Rolle lässt sich nicht nachweisen und die Selbstinduction der beweglichen Dynamometerrolle ist in der That von Einfluss*. Denn die nach Oberbeck unter der Annahme  $L_0=0$  berechneten Werthe von  $L_1$  in der Spalte 8 weichen nicht nur vom theoretischen Werthe erheblich ab, sondern zeigen auch eine regelmässige, wenn auch nur kleine Zunahme mit wachsender Tourenzahl.

Bei Tabelle III dagegen gibt die Formel den wirklichen Verhalt nicht mehr so gut wieder; an eine Condensatorwirkung der Rolle braucht aber auch hier nicht gedacht zu werden. Vielmehr scheinen die Selbstinduction der in diesem Falle nicht unbeträchtlichen Widerstände  $w_2$ ,  $w_4$  und besonders  $w_3$ , sowie die nicht zu controllirende Erhöhung des Widerstandes  $w_1$  durch die Joule'sche Wärme hinreichende Gründe für die Differenz mit dem theoretischen Werth und die geringe Abnahme der Beträge mit steigender Tourenzahl. Eine nähere



letzteren müssen ein für allemal gemessen sein; ebenso sind die Widerstände  $w_2 = w_4$  und  $w_3$  (vgl. Fig.) als bekannt vorausgesetzt. Man bringt dann die Rolle, deren Selbstinductionscoefficient  $L_1$  bestimmt werden soll, nach Messung ihres Widerstandes  $w_1$  in den Zweig 1 der Combination, ändert  $w_3$  solange, bis die bewegliche Dynamometerrolle keine Ablenkung aus der stromlosen Ruhelage zeigt und misst gleichzeitig die Anzahl  $n$  der Stromwechsel pro Secunde im Hauptkreise. Es ist dann

$$L_1 = \sqrt{q + p^2} - p,$$

wobei

$$p = \frac{w_3 + w_4}{w_0 + w_2 + w_4} \cdot L_0 \quad q = \frac{(w_3 - w_1)(w' + w_1 + w_3)}{\pi^2 n^2}$$

$$w' = \frac{w_0(w_2 + w_4)}{w_0 + w_2 + w_4}.$$

Zum Schlusse will ich noch bemerken, dass Versuche, welche ich mit einem Kohlrausch'schen Inductorium und einem Stimmgabelunterbrecher von bekannter Schwingungszahl nach obigem Schema anstellte, wie zu erwarten war, keine günstigen Resultate lieferten.

München, Phys. Inst. d. techn. Hochschule, im Juli 1892.

### *Wilhelm Weber's Werke.*

Die Herausgabe der Werke von Wilhelm Weber durch die königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen wird den Physikern hoch willkommen sein. Wir erlauben uns deshalb, auch an dieser Stelle mitzutheilen, dass von dem auf sechs Bände berechneten Werke soeben Bd. I, enthaltend die Abhandlungen aus der Akustik, Optik und Wärme, besorgt durch Woldemar Voigt, und Bd. II, enthaltend den Magnetismus, besorgt durch Eduard Riecke, bei Julius Springer in Berlin erschienen sind.



mag wohl in dem grossen Temperaturcoefficienten des Quecksilbers liegen und zum Theil auch darin, dass alle Copien, ausser den von Mascart vorgeschlagenen, immer neu gefüllt werden müssen, wodurch die Benutzung derselben so zeitraubend wird, wie die der Normalen selbst. Aus diesen Gründen wurden in der Reichsanstalt hermetisch geschlossene Quecksilbercopien hergestellt, deren Benutzung kaum mehr Umstände verursacht, als die von Drahtwiderständen, und die sich auch fast mit derselben Genauigkeit wie jene vergleichen lassen. Da diese Copien zur Bestimmung des Temperaturcoefficienten vorzugsweise Verwendung fanden, so soll ihre Beschreibung hier folgen.

Ihre Form und Einrichtung ist aus Fig. 1, 2 und 3 ersichtlich. Sie bestehen, wie die Normale, aus Jenaer Glas XVI<sup>m</sup>, und sollen ebenso wie jene nur bei Null Grad verwendet werden; daher wurden sie durch Zuschmelzen gegen äussere Einflüsse vollständig geschützt, nachdem sie im Vacuum fast ganz mit Quecksilber gefüllt waren. Um die Wärmeleitung von aussen möglichst zu vermeiden, verwendete man als Zuleitungsdrähte für jedes Ende je drei dünne, eingeschmolzene Platindrähte (Fig. 3), von denen der oberste *H* den Hauptstrom zuführt, der mittlere *N* zum Nebenschluss und der untere *G* zum Galvanometer geht. Diese Anordnung gewährt den Vortheil, dass alle Zuleitungen fest mit dem Glas verbunden sind, und dass der Widerstand bei bequemer Handhabung desselben von einem unveränderlichen Punkte *s* (Fig. 3) des Endgefässes zählt, wodurch die Anwendung ganz dünner Verbindungsdrähte (0,3 mm) ermöglicht wird.<sup>1)</sup> Die in einer durchlöcherten Messinghülse montirte Copie (Fig. 1 und 2) wird in eine mit Petroleum

Die für den technischen Gebrauch jedenfalls vortrefflich constanten Manganinwiderstände der Abth. II der P. T. R. (System Feussner) sind noch nicht hinreichend lange untersucht, um sie auch für die höchsten Anforderungen als zuverlässige Copien verwenden zu können.

1) Man pflegt häufig, gezwungen durch die Wahl der Methode für die Widerstandsmessung, dicke Kupferzuleitungen zu verwenden und diese in den zu messenden Widerstand einzubeziehen; daraus entstehen Fehlerquellen 1. durch die beträchtliche, unberechenbare Wärmezuleitung und 2. durch Thermokräfte, welche an den zum Widerstand gehörigen Contactstellen (Kupfer-Quecksilber) auftreten.





weichung des Resultates von wenigen Millionstel constatirt werden. Für die definitiven Versuche bediente man sich nur der Ballastwiderstände von 16 oder 100 Ohm.

Um zu erreichen, dass die Messungen bei so kleinem Galvanometerwiderstand übereinstimmende Resultate ergeben, muss zweierlei beobachtet werden. Zunächst muss das Galvanometer zur Vermeidung von Widerstandsänderungen in demselben und von Thermokräften sehr sorgfältig gegen alle Temperaturschwankungen geschützt werden. Das schon von einer Glasglocke umgebene Galvanometer wurde deshalb noch in Watte eingehüllt und ausserdem das ganze Instrument in einen grösseren Pappkasten gestellt, der nur eine kleine Oeffnung zum Ablesen der Scale besitzt. Ferner sollte man sich nicht auf die einmalige Justirung des Differentialgalvanometers verlassen (was bei grossem Galvanometerwiderstand erlaubt ist), sondern die Gleichheit der Galvanometerzweige vor jeder Messung immer wieder dadurch herstellen, dass man durch geeigneten Nebenschluss den Ballastwiderstand II des einen Zweiges regulirt.<sup>1)</sup> Ein Fehler in der Justirung um 1 Scalentheil erzeugte im Mittel einen Fehler der Widerstandsmessung von 0,5 Millionstel Ohm. Es ist bei Anwendung eines kleinen Galvanometerwiderstandes von Vortheil, den Commutator  $K_2$  (Fig. 4) einzuschalten, um ohne Lösung der Stromverbindungen die richtige Justirung des Instrumentes controliren zu können. Als Resultat nahm man das Mittel aus den Messungen in beiden Stellungen des Commutators  $K_2$ , welche übrigens nur in seltenen Fällen um mehrere Millionstel des Widerstandes abwichen.

1) Es ist nicht nöthig, dass sowohl der Widerstand der beiden Zweige, als auch deren Wirkung auf die Nadel völlig gleich sind, vielmehr braucht nur, ohne zu grosse Abweichung von diesen Verhältnissen, die aus beiden Factoren resultirende Gesamtwirkung dieselbe zu sein. Das Verhältniss der Wirkungen beider Zweige auf die Nadel ändert sich bei dem benutzten Elliot'schen Galvanometer im Laufe einiger Tage um Bruchtheile eines Millionstel; die Einstellung auf Gleichheit lässt sich dann am einfachsten dadurch erreichen, dass man eine der Fusschrauben etwas dreht. Dadurch wird die Nadel mehr oder weniger einer unsymmetrisch angebrachten kleinen Spule genähert, welche dem schwächeren Zweige ein für allemal zugefügt werden muss, um die vom Constructeur niemals vollkommen erreichte Gleichheit beider Hälften herzustellen.



	I	II	III
$n^{\circ} 150 - n^{\circ} 151$	0,000 038	38	$0.10^{-6}$
150 — 148	127 <sub>s</sub>	128	— 0 <sub>s</sub>
150 — 149	17 <sub>s</sub>	18	— 0 <sub>s</sub>
149 — 148	110	110	0
149 — 151	20 <sub>s</sub>	20	+ 0 <sub>s</sub>
151 — 148	90	90	0

Spalte I enthält die beobachteten, II die nach der Thiesen'schen Methode <sup>1)</sup> ausgeglichenen Differenzen, III die Unterschiede zwischen Beobachtung und Ausgleichung. Der grösste übrig bleibende Fehler beträgt also nur 0,0000005 Ohm.

*Doppelbrücke.* Das Princip dieses zweiten Messverfahrens ist aus Fig. 6, 7, 8 ersichtlich. Bei  $M$  und  $N$  verzweigt sich der Strom nach den beiden Widerständen  $W_1$  und  $W_2$ ; in  $MC$  und  $MA$  liegen die beiden Zweige eines gut corrigirten Differentialgalvanometers ( $G_1$ , Fig. 7 und 8), durch welches die Prüfung der Gleichheit des Stromes in den beiden Zweigen  $MW_1N$  und  $MW_2N$  ermöglicht wird. Nun lässt sich durch Anlegung geeigneter Nebenschlüsse erreichen, dass sowohl in dem Zweige  $AC$  als auch in  $BD$  keine Potentialdifferenz vorhanden ist, was durch die beiden Zweige des zweiten Differentialgalvanometers  $G_2$  geprüft wird; dann muss zwischen  $AB$  und  $CD$  der gleiche Widerstand liegen.

Zur einwurfsfreien Ausführung der Methode sind allerdings etwas complicirtere Einrichtungen erforderlich. Die gewählte definitive Anordnung ist aus Fig. 8 ersichtlich.  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $K_4$  sind Commutatoren aus Kupfer (zur Vermeidung der in Quecksilber- und Messingcommutatoren auftretenden Thermokräfte);  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$  sind Nebenschlüsse,  $W_1$  und  $W_2$  die zu vergleichenden Widerstände; die Spule  $J$  (Fig. 8) dient zur Compensirung der Selbstinduction. Selbstverständlich müssen  $G_1$ ,  $G_2$  sowie sämtliche Hülfs Widerstände sorgfältig gegen Temperaturänderungen geschützt sein. <sup>2)</sup> Wie

1. M. Thiesen, Karl's Rep. 15. p. 285. 1879.

2) In der neuesten Zeit sind in der Reichsanstalt Versuche angestellt worden, um ein Widerstandmaterial zu finden, das einen kleinen Temperaturcoefficienten besitzt, ohne Thermokräfte gegen Kupfer zu zeigen, und es ist unter den Manganinlegirungen bereits eine gefunden worden, die der geforderten Bedingung entspricht. Die Verwendung dieser Legirung würde manche zeitraubende Vorkehrungen entbehrlich machen.



In allen Fällen wurden die beiden zu vergleichenden Widerstände durch Anlegung eines Nebenschlusses an den grösseren einander nahezu gleich gemacht und dann durch geringe Variirung des Nebenschlusses nach beiden Seiten des richtigen Werthes interpolirt. Der Nebenschluss bestand aus dem vorzüglich abgeglichenen Siemens'schen Widerstandsatz (Nickelin) n<sup>o</sup> 5039, welcher nach den bei Gewichtssätzen gebräuchlichen Methoden <sup>1)</sup> unter Zuhülfenahme eines zweiten Satzes sorgfältig etalonirt und auf absolute Werthe reducirt war. Weil die Nebenschlüsse im ungünstigsten Fall (bei Bestimmung des Temperaturcoefficienten) nur 35 Ohm betrugen, so mussten die Widerstände der Zuleitungsdrähte zu dem Nebenschlusse, sowie die Widerstände der Stöpsel und der zu den einzelnen Rollen führenden Kupfersäulen im Kasten mit in Rechnung gezogen werden. <sup>2)</sup> Bei Berücksichtigung dieser Correctionen erhielt man stets sehr befriedigende Resultate. Die Genauigkeit der Vergleichung bleibt auch bei den Quecksilbercopien nicht wesentlich hinter der zurück, welche sich bei gut construirten Drahtwiderständen erreichen lässt (vgl. Beispiel p. 521).

Es war nicht gut möglich, alle 16 Copien in sämtlichen Combinationen untereinander zu vergleichen, sie wurden deshalb in verschiedene Gruppen zu je 5 eingetheilt, und zwar derart, dass einige Copien in mehrere Gruppen gleichzeitig eingingen. Für jede Gruppe konnte man dann 10 Vergleichen (somit 6 überschüssige) ausführen, welche nach der Thiesen'schen Methode ausgeglichen wurden. Als Beispiel einer solchen Gruppenausgleichung, in welcher wie immer jede Zahl einer einzigen Beobachtung entspricht, seien die Vergleichen vom 8. September 1892 angeführt. Die Stärke des Messstromes betrug wie gewöhnlich 0,01 Ampère:

---

1) Thiesen, Travaux et Mémoires du Bureau intern. des Poids et Mesures (im Druck).

2) 1 Stöpsel = 0,000 15 Ohm; 1 Kupfersäule 0,000 45 Ohm; Widerstand zwischen einer Klemme *N* (Fig. 1) und der Kreuzungsstelle *r* (Fig. 3) mit dem Hauptstrom in der Ampulle ca. 0,025 Ohm.



vorgeht, innerhalb der Beobachtungsfehler von 2 bis 3 Millionstel Ohm, vollkommen constant. Ob der absolute Betrag der gleiche bleibt, wird sich erst nach längeren Zeiträumen constatiren lassen, denn der einzige feste Anhaltspunkt ist durch die Siemens'sche Definition gegeben. Die relative Constanz von Drahtwiderständen ist nach den bisherigen Erfahrungen geringer.

*Temperaturcoefficient.* Bei allen Bestimmungen, wie die vorliegenden, ist die richtige Messung der Temperatur von der grössten Wichtigkeit; die Differenzen in den verschiedenen Untersuchungen über den Temperaturcoefficient sind zweifellos zum grossen Theil auf eine mangelhafte Temperaturbestimmung zurückzuführen.

Die Reichsanstalt hat als empirische Temperaturscala die scheinbare Ausdehnung von Quecksilber in Jenaer Glas XVIII<sup>m</sup> angenommen, und besitzt eine grosse Anzahl individuell (für Kaliber, Fundamentalabstand, inneren und äusseren Druck, thermische Nachwirkung, Nullpunkt) sehr gut untersuchter Thermometer <sup>1)</sup> aus diesem Glas, sowie eine Anzahl Tonnelot'scher Thermometer, wie sie im internationalen Meterbureau Verwendung finden. Die Vergleichung dieser Instrumente, welche in der Reichsanstalt durchgeführt ist, verbürgt die Einheitlichkeit der Temperaturscala der Reichsanstalt und des erwähnten Bureaus. Die Angaben der hier benutzten Thermometer aus Jenaer Glas wurden, wie üblich, auf die Wasserstoffscala reducirt, und zwar mit Hülfe der von P. Chappuis beobachteten Werthe. <sup>2)</sup>

Es soll hier nochmals darauf hingewiesen werden, von welcher grossen Wichtigkeit der richtige Gebrauch eines guten Thermometers ist. Vernachlässigt man z. B. die Correction wegen des inneren Druckes bei verticaler Stellung, so können Fehler von mehreren Hunderstel Grad entstehen, welche mehreren Hunderttausendstel des Widerstandes entsprechen. Ebenso

1) Vgl. Pernet, Jaeger, Gumlich, Thermometrische Untersuchungen I, deren Druck in Vorbereitung ist.

2) P. Chappuis, Travaux et Mémoires VI. Die Reduction beträgt

bei 10° — 0,05°	bei 25° — 0,09 <sub>5</sub> °
15° — 0,07	30° — 0,10
20° — 0,08 <sub>5</sub>	





demselben Rohr der in der Zeiteinheit entwickelten Wärmemenge, also dem Quadrat der Stromstärke proportional.

Bei 0,5 Ampère würde sich das Quecksilber in einem Rohr von den angegebenen Dimensionen schon um 0,8 Grad erwärmen; aus diesem Grunde ist es nöthig, mit Strömen von wenigen Hundertel Ampère zu arbeiten, bei stärkeren Strömen aber längere Zeit zu schliessen und die Enderrwärmung in Rechnung zu ziehen. Für 0,1 Ampère würde diese Correction aber schon zu unsicher ausfallen. Erwärmte man z. B. die Quecksilbersäule durch den Strom um 0,08 Grad, so blieben davon nach 25 Minuten immer noch einige Tausendstel Grad übrig, während nach 5 Minuten erst die Hälfte der Erwärmung verschwunden war. Dieser langsame Ausgleich bei kleinen Temperaturunterschieden muss daher bei nicht ganz constanten Bädern, durch das Zurückbleiben der Temperatur des Quecksilbers, unter Umständen beträchtliche Fehler hervorrufen.

Als Vergleichswiderstand diente einer der p. 518 erwähnten Manganinwiderstände ( $n^{\circ} 148$ ), welcher sich stets in einem Petroleumbade von Lufttemperatur befand. In der folgenden Tabelle sind die Ende August und Anfang September 1892 ausgeführten Messungen der Widerstände  $W$  der Copien zwischen den Temperaturen  $14,6^{\circ}$  und  $28,2^{\circ}$  angegeben. Ausserdem sind die Werthe  $W_0$  bei  $0^{\circ}$  beigelegt, sowie das Verhältniss von  $W/W_0$ .

$$a = \frac{A - B}{\log R - \log r} \quad \text{und} \quad b = \frac{A \log R - B \log r}{\log R - \log r}.$$

Die in der Zeiteinheit für die Längeneinheit entwickelte Wärmemenge ist

$$M = -kq \frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho},$$

daraus folgt

$$k = \frac{M}{2\pi(A - B)} \log \frac{R}{r}.$$

Ein Versuch ergab bei 0,15 Ampère eine durch Widerstandsänderung gemessene Temperaturerhöhung von  $0,03^{\circ}$ . Da der äussere Durchmesser 6,8 mm, der innere 0,975 mm betrug, so findet man für Jenaer Glas:

$$k = 0,07.$$



Da bei der Reduction von Messungen mit Quecksilberwiderständen kaum höhere Temperaturen als die hier beobachteten in Betracht kommen dürften und ausserdem die Bestimmung des Temperaturcoefficienten bei höherer Temperatur complicirte Einrichtungen erforderlich gemacht hätten, die nicht in der Absicht der Reichsanstalt lagen, so sah man von einer weiteren Ausdehnung der Versuche ab.

Die aus den Beobachtungen sich ergebenden Grössen  $\alpha + \beta t$  der Formel  $1 + \alpha t + \beta t^2$  sind für die einzelnen Copien graphisch ausgeglichen, und daraus die Mittelwerthe in der Weise abgeleitet worden, dass die Beobachtungen bei den zuverlässigsten Temperaturen am besten dargestellt werden. Die vorletzte Spalte enthält die aus der so abgeleiteten Formel

$$(I) \quad w_t = w_0 [1 + 0,000\,875\,t + 0,000\,001\,25\,t^2]$$

berechneten Werthe. Sie dient zur Reduction von Quecksilberwiderständen in Jenaer Glas, welche bis zu  $28^\circ$  der Wasserstoffscala beobachtet sind, auf Null Grad. Die nach Formel (I) berechneten Werthe  $w_t : w_0$  (relative Widerstandsänderung von Quecksilber in Jenaer Glas) von  $15^\circ$  bis  $26^\circ$  sind in folgender Tafel zusammengestellt.

Temp. H-Scala	$w_t : w_0$	Temp. H-Scala	$w_t : w_0$
15 <sup>o</sup>	1,01340 <sub>5</sub>	21 <sup>o</sup>	1,01892 <sub>5</sub>
16	1,01432	22	1,01985 <sub>5</sub>
17	1,01523 <sub>5</sub>	23	1,02078 <sub>5</sub>
18	1,01615 <sub>5</sub>	24	1,02172
19	1,01707 <sub>5</sub>	25	1,02265 <sub>5</sub>
20	1,01800	26	1,02359

Da die Ausdehnungscoefficienten des Jenaer Glases XVI<sup>III</sup> und des Tonnelot'schen Glases (verre dure) sehr nahe übereinstimmen, so gilt die Tafel auch für das letztere Glas fast vollständig.

Es ist bemerkenswerth, dass die einzelnen Copien offenbare Verschiedenheiten im Temperaturcoefficienten zeigen, welche die Beobachtungsfehler wesentlich überschreiten. Es



Grad	$\alpha + \beta t$		$w_t' / w_0$	
	P. T. R.	Guillaume	P. T. R.	Guillaume
0	0,000 882 <sub>5</sub>	0,000 888	1,000 00	1,000 00
5	889	893	4 44 <sub>5</sub>	4 46 <sub>5</sub>
10	895 <sub>5</sub>	898	8 95 <sub>5</sub>	8 98
15	901 <sub>5</sub>	903	13 52 <sub>5</sub>	13 55
20	908	908 <sub>5</sub>	18 16	18 16 <sub>5</sub>
25	914	913 <sub>5</sub>	22 85 <sub>5</sub>	22 83 <sub>5</sub>
30	920 <sub>5</sub>	918 <sub>5</sub>	27 61 <sub>5</sub>	27 55

Die Abweichungen zwischen den Resultaten der beiden, mit vollkommen verschiedenen Methoden und Apparaten geführten Untersuchungen übersteigen die Beobachtungsfehler nicht wesentlich, denn sie bleiben zwischen 0° und 25° unterhalb 0,000 03 Ohm.

Da die einzelnen Copien Unterschiede im Temperaturcoefficienten zeigten, und es möglich wäre, dass ein gerades Rohr andere Resultate gibt, so wurde auch mit einem geraden Normalrohr eine Messung bei 15° ausgeführt, welche bis auf 0,000 01 Ohm mit den Resultaten der Formel (I) übereinstimmte.

Widerstand bei 14,96° 1,01 089  
                  ,,          ,,          0° 0;99 756<sub>5</sub>

$w_t : w_0 = 1,01 336$ , während Formel (I) 1,01 337 ergibt.



nicht geladene Strecken des Reibzeuges hingeführt wird, ein bestimmtes Maximum der Spannung endlich stets eintritt. Dies Maximum ist das höchste erreichbare; wird der Reiber *cet. par.* bei seiner Bewegung nicht immer über neue noch unelectrische Stellen fortgeschoben, so treten schliesslich geringere maximale Ladungen auf. Bedenkt man, dass bei blossen Contact von Metall und Nichtleitern nur sehr schwache Ladungen erzielt werden <sup>1)</sup> trotzdem aber Reibung leicht zu Ladungen führt, die mit den grössten Electroskopen nachweisbar sind, so könnte man also bei Verwendung feinerer Instrumente auch bei Gasen ganz entschiedene Effecte erwarten, wenn es z. B. gelänge, solche in neutralem Zustande und in genügender Menge gegen ein isolirtes Metallstück, wie an demselben vorbei mit geeigneter Heftigkeit strömen zu lassen.

Versuche Gasreibung an Metallen als Electricitätsquelle nachzuweisen, sind schon vor langer Zeit angestellt worden, meines Wissens alle mit negativem Erfolge, <sup>2)</sup> während man allerdings bei einigen Isolatoren zu anderen Ergebnissen kam. Armstrong <sup>3)</sup> legte sich die Frage vor, ob comprimirte Luft ebenso wie Dampf beim Ausströmen Electricität erregen könne. Zu acht Atmosphären in einem etwa sechs Quart fassenden Kessel verdichtet und durch eine Glasröhre ins Freie tretend, ergab Luft erhebliche Ladung des isolirten Kessels, selbst Funken bis zu  $\frac{1}{4}$  Zoll Länge konnten erhalten werden. Aber Stärke und sogar Vorzeichen der Electrisirung waren zu Zeiten schwankend, Kälte und Feuchtigkeit begünstigten das Auftreten von Ladungen, bei *heissem trockenem* Kessel traten *keine mehr auf*; dagegen in fast unveränderter Stärke nachdem kaustisches Kali in den Kessel eingeführt worden, und darin längere Zeit verweilt hatte. Es war stets nöthig, den Ausströmungscanal möglichst plötzlich zu öffnen. Bei mildem feuchtem Wetter fand sich der isolirte Kessel regelmässig negativ, bei abgeleitetem wurde dann der Luftstrom positiv. Eine bestimmte Erklärung dieser Phänomene gab Armstrong nicht. Genauere Einsicht in die betreffenden Erscheinungen ver-

---

1) Wiedemann, Electr. 1. p. 211.

2) Vgl. Riess, Reib.-Electr. 2. p. 399.

3) Armstrong, Phil. Mag. 18. p. 133 u. 329. 1841.













































































dasselbe an Substanzen, die mit Kohlensäure länger in Berührung gewesen und Gelegenheit hatten, solche zu adsorbiren. Man müsste also schon schliessen, dass bei etwas anderer Zusammensetzung der Oberflächenschicht gegenüber der reibenden Substanz eine electromotorische Kraft vorhanden ist. Bei Faraday's Versuchen machte sich übrigens die Natur des die Reibung erleidenden Stoffes deutlich bemerkbar, sei es, dass aus ihm der Ausströmungskanal hergestellt worden, oder dass man ein Stück davon in den Dampfstrahl hielt, indem z. B. eine Röhre aus Federkiel oder Elfenbein den Dampfstrahl ungeladen austreten lässt. Die Temperatur ist hierbei entschieden nicht hoch genug, um alle adsorbirten Schichten völlig entfernen zu können; es sei hier nochmals an die negativen Ergebnisse der Versuche von Elster und Geitel erinnert, und auch daran, dass die Erhitzung der Spirale gegen  $200^{\circ}$  bei meinen Versuchen die electromotorische Wirksamkeit durchaus nicht vergrösserte. Würden die Gashüllen dadurch genügend von dem Metalle entfernt und alsdann erst Reibung am Metalle ermöglicht, so hätte ja trotz Verschwindens alles Nebels die Kohlensäure kräftige Ladungen liefern müssen. Man muss also wohl aus Faraday's Versuchen schliessen, dass *die Natur der festen Substanz, trotz etwaiger adsorbirter Gasschichten, noch immer sich geltend macht*, man müsste denn wieder annehmen, dass Elfenbein und Federkiel überhaupt nicht zu adsorbiren im Stande sind, was aber bislang durch nichts bewiesen ist. Auch bei meinen Versuchen über Tröpfchenreibung machte sich in der oben geschilderten Weise der Zustand der Oberfläche geltend bis zur Umkehr des Vorzeichens. Sollte dann aber nicht auch dasselbe der Fall sein, wenn Gas mit Heftigkeit gegen einen fremden Körper getrieben wird? Bringen wir Metall in Chlor, so tritt sofort chemische Einwirkung ein, ersteres ist dem Gase also doch zugänglich, oder sollte das nur geschehen können, indem das Chlor zunächst adsorbirt wird, und dann erst chemische Einwirkung erfolgt? Sollte dann aber, wenn solche Vorgänge so schnell abzufließen vermögen, bei dem starken Anprall der anstürmenden Luft nicht irgendwelche Veränderung bis zu dem Metalle selbst sich fortpflanzen? Ueber die nähere Beschaffenheit der adsorbirten Schichten



doch stets bedeutend genug, um die adsorbirten Schichten zu durchdringen und eine wirkliche Berührung der festen Körper zu ermöglichen. Ist aber einer der beiden Körper ein weicher Stoff, so erscheint diese Auffassung doch schon recht fraglich, ganz ungeeignet aber vollends bei der Tröpfchenreibung. Hält man wirklich die Luftreibung aus dem obengenannten Grunde für unwirksam, wie verhält es sich dann mit Sauerstoff und Kohlensäure? Diese sind doch von der Zusammensetzung der Gashüllen erheblich verschieden und doch sind sie electromotorisch bei Reibung unwirksam. Sollte sich sofort eine Hülle des betreffenden Gases bilden und derselbe Fall wie bei Luftfriction eintreten? Haften die adsorbirten Gase so fest, dass sie das Metall den anprallenden Molecülen gänzlich unzugänglich machen, so können sie nicht mit einem mal völlig entfernt werden, es kann sich alsdann nur um eine Art Ueberzug handeln, der sich bildet, indem Theile der früheren Luft-hülle hinweggerissen werden. Dann ist aber auch anzunehmen, dass bei heftigem Strömen des Gases dieser Ueberzug fortgerissen und wieder erneuert wird; also fände eine Art von Reibung der äusseren adsorbirten Schicht an der inneren Luft-hülle statt, da sollte denn doch bei der Verschiedenheit der Zusammensetzung Electricität auftreten. Kaum dürfte dies alles wohl anders zu deuten sein, als dass *der gasförmige Zustand besonders ungeeignet ist zu electromotorischer Wirkung wenigstens bei Reibung*. Sind in der That die Gase so vollkommene Isolatoren, wie nach den neueren Versuchen zu erwarten, können sie etwa ohne Dissociation nicht leiten, so ist auch nicht recht einzusehen, wie sie sich durch irgend eine reine Contactwirkung (ohne chemische Vorgänge) laden können. Solches würde ja einen Zerfall in Ionen bedingen, von denen sich nur die eine an dem Metalle entladen könnte. Doch soll eine weitere Ausführung dieser Anschauungen hier nicht versucht werden.



infolge der dem Siedeverzuge ähnlichen erschwerten Gasentwicklung bei niederen Intensitäten; drittens infolge des Uebergangswiderstandes infolge der Diffusion der Gase, auf welchen Hr. v. Helmholtz<sup>1)</sup> aufmerksam gemacht hat.

Im dritten Theile sind die Bestimmungen der Polarisation beschrieben, welche ich mit dem Helmholtz'schen Pendelunterbrecher angestellt habe. Diese Versuche ergaben zwar nicht die Polarisation während der Dauer des polarisirenden Stromes; aber auch nicht ihren Werth zu einer bestimmten Zeit *nach* Unterbrechung jenes Stromes; sondern den Mittelwerth der Polarisation während ihres Abfalles in der Zeit von dem Augenblicke einer erheblichen Schwächung des polarisirenden Stromes an, bis zu einem 0,0006 bis 0,008 Sec. späteren Augenblicke. Die Methode bietet mit der Fechner'schen Methode zur Bestimmung electromotorischer Kräfte<sup>2)</sup> die Uebereinstimmung, dass in einem Stromkreise mit sehr grossem Widerstande kleine Widerstandsänderungen unberücksichtigt bleiben dürfen, und die Intensität der electromotorischen Kraft proportional gesetzt werden kann. Auf die Art, wie der Pendelunterbrecher die Umschaltung bewirkt, will ich nicht näher eingehen. Die Resultate meiner Messungen sind: Bei den kleinen Electroden wird schon für geringe Intensitäten das Maximum der Polarisation erreicht. Der grösste Werth derselben, wie er aus meiner Methode unmittelbar hervorgeht, ist 2,4 Daniell. Dies ist der Mittelwerth der abfallenden Polarisation während einer sehr kurzen, 0,0006 bis 0,008 Sec. betragenden Zeit nach Schwächung des polarisirenden Stromes. Durch Veränderung dieser sehr kurzen Zeit gewinnt man ein Urtheil über die Schnelligkeit des Abfalles der Polarisation. Für kleine Intensitäten liess sich ein solcher mit Sicherheit messen; für grosse Intensitäten fiel er in den Bereich der bei diesen grösseren Beobachtungsfehler. Diese Messungen liessen mit grosser Wahrscheinlichkeit darauf schliessen, dass die Polarisation *vor* der Unterbrechung nur

1) H. v. Helmholtz, Sitzungsber. der Berl. Akad. p. 664. 1883: Wied. Electr. 4. p. 1305.

2) Wüllner, Experimentalphysik. 4. 4. Aufl. p. 603. Die Sätze, welche Fechner für den „Uebergangswiderstand“ bei der Electrolyse fand, vgl. ebenda p. 765.



muss, diese aber mit dem kleinsten Werthe von 2,6 Daniell beginnt, so muss man annehmen, dass auch bei den grösseren Intensitäten die Polarisation vor der Unterbrechung nicht grösser als 2,6 Daniell gewesen sein kann.

Von dem Abfall der Polarisation nach Unterbrechung des polarisirenden Stromes ist wohl zu unterscheiden das momentane Verschwinden desjenigen Theiles der Potentialdifferenz, welcher durch das Product aus Widerstand und Intensität gegeben ist und zwischen einer Electrode und irgend einem dritten in die Flüssigkeit tauchenden Hülfsdrahte neben der Polarisation besteht, solange der Strom dauert. Das momentane Verschwinden dieses Theiles der Potentialdifferenz würde allein schon genügen zur Erklärung der Zuckungen der Electrometernadel, welche die Hrn. Koch und Wüllner bei Änderungen der Stromstärke und schnellem Umlegen eines Commutators beobachtet haben.<sup>1)</sup>

Weiterhin sagen die Hrn. Koch und Wüllner: „Hr. Richarz gibt indessen den beobachteten Erscheinungen nicht nur eine andere Deutung wie die früheren Beobachter, sondern seine Resultate stehen auch mit den früheren Beobachtungen in einem thatsächlichen Widerspruch. Hr. Fromme findet unter Annahme eines constanten Widerstandes ein Wachsen der Polarisation mit zunehmender Stromstärke, d. h. bei zunehmender electromotorischer Kraft wächst die Stromstärke langsamer, als es einem constanten Werthe der Polarisation entspricht; Hr. Richarz dagegen findet unter der Annahme einer constanten Polarisation mit wachsender electromotorischer Kraft einen abnehmenden Widerstand in der Zersetzungszone, d. h. also, der Strom wächst mit zunehmender electromotorischer Kraft so, wie wenn bei constantem Widerstande die Polarisation abnähme.“

Was zunächst die Versuche des ersten Theiles meiner Arbeit betrifft, in welchem ich Messungen der Intensität im geschlossenen Stromkreise während der Electrolyse angestellt habe, so stehen diese Messungen selbst in voller Uebereinstimmung mit denjenigen von Buff und Hrn. Fromme. In derselben Weise berechnet, wie von diesen, liefern meine

1) Koch u. Wüllner, l. c. p. 476.





das Verhalten der Polarisation aber aus den Resultaten entnehmen, während letztere mit ersteren unvereinbar sind.

### III.

Die Hrn. Koch und Wüllner selbst haben nun folgende Messungen angestellt. Anode  $\alpha$  und Kathode  $\kappa$  aus Platindraht befinden sich in Bechergläsern  $a$  und  $k$ , die durch eine U-Röhre verbunden sind. Die Gefässe  $a$  und  $k$  können abwechselnd durch Heber und zwischengeschaltete Bechergläser mit einem Gefässe  $e$  verbunden werden, welches eine mit dem Electrometer verbundene Platinplatte  $\epsilon$  enthält. Während des Stromdurchganges wurde gemessen die Stromstärke  $i$ ; electrometrisch die Potentialdifferenz von Anode und Kathode gegeneinander  $D$ , und bei Verbindung der Gefässe  $a$  und  $e$  die Potentialdifferenz  $\alpha$  gegen  $\epsilon$ , bez. bei Verbindung von  $k$  und  $e$  die Potentialdifferenz  $\kappa$  gegen  $\epsilon$ . Die Summe der Potentialdifferenzen  $\alpha$  gegen  $\epsilon$  und  $\kappa$  gegen  $\epsilon$  wird mit  $p$  bezeichnet. Es findet sich, dass mit hinreichender Annäherung

$$p = \pi + u \cdot i$$

gesetzt werden kann, wo  $\pi$  und  $u$  von  $i$  unabhängig sind.  $\pi$  soll dann die electromotorische Gegenkraft der Polarisation sein;  $u$  wird Uebergangswiderstand genannt.

Was zunächst die Berechnung der Constanten  $\pi$  und  $u$  aus den Beobachtungen betrifft, so bemerken die Hrn. Koch und Wüllner selbst die Unsicherheit der Berechnung für gewisse Fälle. Die zu Grunde liegende Gleichung lautet

$$(b) \quad p = \pi + a(D - p),$$

wo eine Constante  $a$  an Stelle von  $u$  eingeführt ist. Diese Gleichung wird umgeformt, indem

$$(c) \quad p = R + S D$$

gesetzt wird. Daraus folgt dann

$$(d) \quad \pi = \frac{R}{1 - S}.$$

„Die Umformung wurde vorgenommen, weil in der Gleichung (b) auf der rechten Seite die Differenz zweier beobachteten Werthe steht, die zuweilen recht klein ist, somit durch selbst kleine Beobachtungsfehler sehr erheblich beeinflusst werden kann.“<sup>1)</sup>

1) Koch u. Wüllner, l. c. p. 500.



Endfläche der Electrode in die Ebene ausserhalb der Electrode gedacht, sodass der Electrolyt Theile getheilt ist. Dann tritt die Mantelfläche des Cylinders durch die freie Endfläche in den Theil der Flüssigkeit aus. In jedes einzelnen dieser beiden Theile Nebeneinschaltung zusammen.

Strömt die Electricität aus vom Radius  $r$  radial aus, so wird der Cylinders der Flüssigkeit bis  $x$

$$w = \frac{\log \text{nat} \frac{x}{r}}{2\pi k l}$$

wo  $h$  die Höhe des durchströmten,  $l$  die Länge der drahtförmigen Leitungsfähigkeit, bezogen auf Koch und Wüllner handelt. Die Flüssigkeit zwischen einer der einerseits und derjenigen Aequ dem Electrometer verbundene. Es wird zur Berechnung dieses einigermassen entsprechen, wo die fläche eine Cylinderfläche vom Radius  $r$  oder  $h$  annimmt. Derselbe ist der Drähte war  $r = 0,05$  mm.

Der Widerstand der Ausströmung ist nach der bekannten Formel zu berechnen.<sup>1)</sup> Der durch Zusammenfassung für eine Electrode berechnet, in  $p$  doppelt auf, einmal für die Kathode. Unter diesen vereinigen sich der in  $p$  auftretende Widerstand bei Temperatur 5°:

1) F. Kohlrausch, Leitfaden der Physik, Anm. 2.



widerstand  $u$ “ ist also im wesentlichen der Ausbreitungswiderstand der Flüssigkeit bei der Verbreitung des Stromes von den dünnen Electroden aus.

Ausser dem „Uebergangswiderstand“ berechnen die Hrn. Koch und Wüllner den „Widerstand des Electrolyten“

$$W = \frac{D - p}{i},$$

d. h. den Widerstand, welcher der gesammten Potentialdifferenz der Electroden  $D$  nach Abzug der Gegenkraft der Polarisation und der durch die Ausbreitungswiderstände verursachten Potentialdifferenz ( $\pi + iu = p$ ) entspricht.  $W$  ergibt sich, von kleinen Differenzen abgesehen, unabhängig von der Electrodengrösse, und im Mittel für

Lösung:	1 Proc.	10 Proc.	20 Proc.	30,4 Proc.	42 Proc.
$W$	269	34	20	18	20 Ohm.

$W$  muss im wesentlichen der Widerstand des U-Rohres von 2,5 cm Durchmesser und 50 cm ganzer Länge sein, welches die beiden Electrodengefässe verbindet. In der That berechnet man aus diesen Dimensionen für 0° folgende Werthe:

Lösung:	1 Proc.	10 Proc.	20 Proc.	30,4 Proc.	42 Proc.
$W$	238	32	20	18	21 Ohm.

Der Widerstand  $W$ , welcher im wesentlichen der 50 cm langen U-Röhre entspricht, und der „Uebergangswiderstand“ zusammengenommen bilden den Widerstand der Zersetzungs- zelle als Ganzes. Bei einer Versuchsanordnung, bei welcher die Electroden sich in *einem* Becherglase befinden, wie bei Hrn. Fromme, oder bei welcher die Electroden sich am unteren Ende einer ganz kurz umgebogenen weiten U-Röhre befinden, wie bei mir, würden analoge Messungen, wie diejenigen der Hrn. Koch und Wüllner, für den Widerstand  $W$  den Werth Null oder nur einen kleinen Werth ergeben. Bei den Versuchen von Hrn. Fromme und den meinigen würde also der gesammte Widerstand der Zersetzungs- zelle nahezu mit dem „Uebergangswiderstand“ übereinstimmen.

Hieraus ist Folgendes zu schliessen. Wenn die Hrn. Koch und Wüllner die Potentialdifferenz  $p$  zerlegen in  $\pi + iu$ , und die *Constante*  $\pi$  als electromotorische Kraft der Polarisation, die *Constante*  $u$  als „Uebergangswiderstand“ deuten, so steht diese Deutung im Widerspruch mit den Intensitätsmessungen









besonders instructive, die ich bei denselben nicht finde, will ich kurz erwähnen.

Das Phänomen ist am leichtesten zu erhalten, wenn man als die eine Electrode ein Platinblech, als die andere einen feinen kurzen Draht der erwähnten Art nimmt, und letzteren vor dem Eintauchen in die Säure mit dem anderen Pol der Batterie verbunden hat. Biegt man feinen Platindraht zu einer etwa 20 mm langen schmalen Oese, die mit beiden Enden um einen dicken Draht gewickelt als die eine Electrode dient, so kann man die Oese bei einer Batterie von 14 Grove bis zu 10 mm Tiefe und mehr in die Säure tauchen, sodass das Phänomen erhalten bleibt; dabei ist deutlich zu erkennen, dass der ganze Zwischenraum zwischen den beiden Seiten der Schlinge mit einer Gasschicht angefüllt ist, besonders durch die totale Reflexion beim seitlichen Betrachten. Auch mit dickeren Platindrähten (etwa 0,3 mm Durchmesser) kann man ähnliche Erscheinungen erhalten; diese Drähte müssen aber vollkommen glatt, und möglichst gerade sein, wenn der abnorme Zustand einigermaassen stabil sein soll. Einen solchen Draht von grösserer Länge als Anode vor dem Eintauchen mit einer Batterie von 14 Groveschen Bechern verbunden, während als Kathode ein Platinblech dient, kann man bis zu 3 cm und mehr vorsichtig eintauchen, sodass der Zustand bestehen bleibt. Dabei ist der Draht von einer Gashülle wie von einem Schlauch umgeben; wo der Draht durch die Oberfläche der Flüssigkeit hindurchgeht, ist dieselbe trichterförmig eingezogen; alles an dieser Electrode abgeschiedene Gas entweicht durch die Dampfhülle, welche den Draht umgibt, in die Höhe, sodass gar keine Blasenentwicklung stattfindet. Sehr eigenthümlich gestaltet sich auch die Erscheinung bei dicken Platindrähten, wenn man dieselben ähnlich wie die Electroden aus feinem Draht bis auf ein kurzes freies Ende in eine Glasröhre einsmilzt. Man kann dann den Zustand bis zu gänzlichem Eintauchen der freien Drahtoberfläche erhalten; die Gashülle, welche dieselbe umgibt, schwillt allmählich an ihrer höchsten Stelle an, bis eine Blase abreisst, was sich in kurzen Zwischräumen wiederholt. Für eine Batterie von 14 Grove kann man bei freien Drahtenden von mehreren Centimetern Länge den beschriebenen Zustand lange Zeit er-



der auseinandergesetzt habe. Aber nach Ansicht von Koch und Wüllner würde die Erscheinung durch jene Dampfhülle zwar zum Theil bedingt werden; dieselbe sollte aber doch „nicht das wesentlich Bedingende“ sein.<sup>1)</sup> Sicherlich wird die Erscheinung auch durch andere Processe, welche *neben* der Bildung der Dampfhülle gleichzeitig stattfinden, beeinflusst, so durch die von Hrn. Nahrwold<sup>2)</sup> nachgewiesene Zerstäubung erhitzten Platins, durch die von Hrn. Mac-Leod<sup>3)</sup> gefundene Auflösung von Platinelectroden, und vielleicht auch, wie die Hrn. Koch und Wüllner glauben und näher untersuchen wollen, durch Occlusion der abgeschiedenen Gase.

Berlin, im August 1892.

---

1) Koch u. Wüllner, l. c. p. 774.

2) Nahrwold, Wied. Ann. 81. p. 467. 1887.

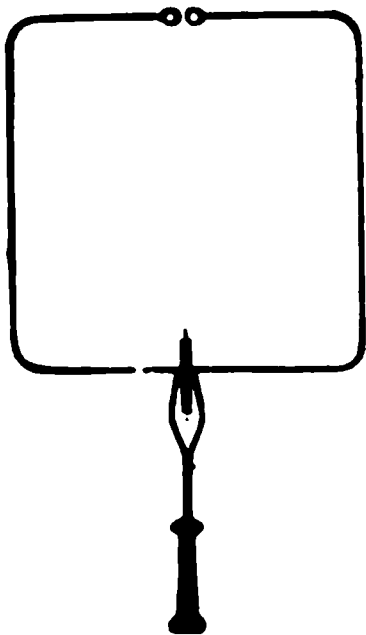
3) Mac Leod, Journ. Chem. Soc. London 49. p. 591. 1886.



Es hat sich indess auch als möglich erwiesen, grosse Genauigkeit in den Funkenmessungen selbst bei *sehr kleinen* Funken zu erreichen, was von grosser Bedeutung ist, im Fall eine vergrösserte Funkenlänge nur so erzielt werden kann, dass die theoretische Einfachheit dadurch leidet.

Das von mir zur Beobachtung der Länge der Funken verwendete Hilfsmittel ist das Telephon, sowohl bei Versuchen, wo secundäre Rahmen benutzt wurden, als auch bei mehr directen Untersuchungen der Wellen vom primären Excitator.

Die Schwingungsdauer und das Dämpfungsverhältniss in einem secundären Rahmen ändert sich nicht um mehr als einige Procente, wenn man in denselben einen kleinen kräftigen Condensator der Funkenstrecke diametral gegenüber stellt. (Siehe nebenstehende Figur.)



Führt man in diesen secundären Rahmen ein Telephon ein, sodass die beiden Condensatorbelege durch dasselbe in metallischer Verbindung stehen, so erweist dieser neue Rahmen in den obenerwähnten Beziehungen keinen beträchtlichen Unterschied von dem alten. Wohl besitzt er aber andere Eigenschaften, die ihn zu einem vorzüglichen Messapparat machen.

Hat man nämlich durch besondere Vorrichtungen die verhältnissmässig langsamen magnetischen Veränderungen in dem Felde möglichst entfernt, die für sich allein Telephongeräusch in einem solchen System hervorbringen würden, und die Leitung so vorgerichtet, dass man nur schnelle *Hertz'sche Schwingungen* in dem Rahmen bekommt, so lässt sich im Telephon durchaus kein Tönen vernehmen, wenn die Schwingungen auch ausserordentlich kräftig sind. Tritt dagegen in dem Rahmen bei einem passend abgemessenen Abstand zwischen den Polkugeln ein wenn auch noch so kleiner Funke auf, so hört man bei dieser Anordnung immer ein Geräusch im Telephon, und durch besondere Versuche lässt sich dann nachweisen, dass ein Abströmen von Electricität durch die Telephonwindungen ganz anderer Art vor sich geht, als in dem Falle, wo die Polkugeln so









dem Boden, so dass der Wagen mit Zubehör das lange Gestell auf- und abgeschoben werden konnte, ohne dass die Verbindung aufgehoben wurde.

8. Wenn die Polkugeln des Funkenmikrometers zusammengeschraubt waren, war eine directe metallische Leitung von der Hauptleitung in die Erde hergestellt; waren sie es nicht, so stand nur der Gleitcontact und die eine Polkugel mit dazu gehörender 3 cm langer Leitung mit derselben in Verbindung.

Die Capacität dieser 3 kleinen Stücke schätze ich auf 1 bis 2 cm.

Das Funkenmikrometer, dessen Polkugeln einen Durchmesser von ca. 1 cm hatten, war von besonders guter Construction mit Schlittenführung; jeder Trommeltheil entsprach 0,0025 mm; man konnte daher einen Unterschied der Schlagweite von 0,0005 mm erkennen.

Eine solche Genauigkeit der Funkenmessung ist nothwendig, weil man Funken zwischen 0,0025 mm und 0,025 mm bis auf so kleine Grössen constant halten kann.

Werden die Funken grösser, so ist das schwerer, sodass die procentische Sicherheit bei grossen Funken bis 0,1 mm (ich habe sie nie grösser benutzt) schwerlich so gross wie bei kleinen ist.

Um den Funken des Mikrometers gegen die Einwirkung fremden Lichtes zu schützen, waren die Polkugeln mit einem Käppchen umgeben, das bequem entfernt werden konnte, wenn man die Kugeln reinigen wollte.

Endlich stand auf dem beweglichen Wagen eine Lampe, die die Scaleneintheilung des Mikrometers beleuchtete.

9. Die Reinigung *der Kugeln des Funkenmikrometers* ist mit grossen Schwierigkeiten verbunden und erfordert grosse Vorsicht.

Ich bin schliesslich wieder darauf zurückgekommen, sie mit dem feinsten Schmirgel, der zu haben ist, zu reinigen und sie nachher mit einem weichen trocknen Pinsel abzutupfen.

Wenn man nur Schmirgel benutzt, bekommt man grosse, aber unstete Funken, sie werden schnell schwächer und sinken nach einiger Zeit auf einen minimalen Werth hinab, sind aber auch hierbei nicht constant und daher weniger brauchbar.

Wenn man dagegen die Kugeln nach der Reinigung leicht

















die abrupten Veränderungen zu vermeiden wären, die niedrigsten Partien der Curven alle in einer Höhe liegen würden.

Um dieses Verhältniss näher zu untersuchen, wurden dann mehrere Reihen von Messungen der Schlagweiten aller Minima ausgeführt. Die unten aufgeführte Reihe bestätigt die oben erwähnte Ansicht.

Die Schlagweiten sind in Trommeltheilen angeführt, deren jeder 2,5 Mikron entspricht.

1. Min.	2. Min.	3. Min.	4. Min.
5,6	5,6	5,5	5,6
5,5	5,7	5,6	—
—	5,5	5,0	5,6
5,7	5,8	5,7	—

Die Zahlen geben an, in welcher Reihenfolge die Messungen ausgeführt wurden.

19. Demnach lässt sich die vollständige Beobachtungsreihe bequem in kleinere Abschnitte einteilen; so ist die Länge von 14 m in Viertel getheilt, und für jeden Abschnitt sind die Beobachtungen in einer Anzahl von fünf Reihen vor- und rückwärts ausgeführt.

Nachher werden alle den Schlagweiten entsprechenden Potentiale innerhalb jedes Abschnittes auf einen gemeinsamen Minimalwerth proportional reduziert.

In der unten aufgestellten Tabelle ist die letzte Zahlreihe jedes einzelnen Abschnittes fett gedruckt.

Die fünf letzten zusammengehörenden Reihen (Tab. I) sind mit demselben primären Leiter ausgeführt wie die erste Reihe, nur ist der Abstand zwischen den Plattenpaaren 30 cm und die Funkenlänge 3 mm.

20. Weil die Schlagweiten in Tabelle I zwischen 3 und 25 Trommeltheilen liegen, so können die von verschiedenen Physikern über das Verhältniss zwischen Schlagweiten und dazu gehörenden Potentialen aufgestellten Tabellen hiermit nicht verglichen werden. Nur eine von Thomson umfasst ganz kleine Schlagweiten von 25 Mikron an; der nächstfolgende Werth ist ca. 50 Mikron; selbst diese Tabelle genügt aber natürlich nicht bei solchen Untersuchungen, wo die Funkenlängen so klein sind wie in Tabelle I.



Ausserdem ist es nicht a priori sicher, dass die Schlagweite, die einem gewissen Potentialunterschied zwischen den Polkugeln entspricht, von der Zeit unabhängig ist, in welcher sich die Ladung in denselben erhält; man muss sich erinnern, dass die Zeit, während welcher die Ladung hier in der Nähe ihres grössten Werthes bleibt, nach Bruchtheilen von hundert-milliontel Secunden zu rechnen ist.

Die Kraft, um die Luftschicht zu durchbrechen, ist wohl in diesem Falle eine grössere, als die für die Entladung zwischen relativ langsam geladenen Leitern.

Durch besondere Versuche habe ich daher eine Funkentabelle aufgestellt, welche jedenfalls das Verhältniss zwischen den den Schlagweiten entsprechenden Potentialdifferenzen gibt. Nimmt man dann vorläufig an, dass die mittels des Funkenmikrometers gemessene maximale Potentialdifferenz mit dem grössten Potentiale der Contactstelle der Hauptleitung proportional ist<sup>1)</sup>, so werden folglich die in der Rubrik „Entsprechende Potentiale“ aufgeführten Zahlen bis auf einen Proportionalitätsfactor die Potentiale der Beobachtungsstellen längs der Hauptleitung sein.

Die zur Darstellung der Funkentabelle angewendete Methode sowie die Versuche mit den erfolgten Resultaten gedenke ich in meiner nächsten Abhandlung mitzutheilen.

Fig. 3 ist das Resultat der fünf zusammengehörenden Reihen der Tabelle I graphisch dargestellt (voll schwarz gezogen). Die Potentiale der letzten Columne sind als Ordinaten, die Abstände von  $E$  in Metern als Abscissen verzeichnet.

21. Die im Vorhergehenden behandelten Versuche wurden mit frei endenden Hauptleitungen ausgeführt. Die Resultate der entsprechenden, mit verbundenen Enden  $E$  ausgeführten Versuche sind in Tabelle II mitgetheilt und in Fig. 4 graphisch dargestellt.

Die erste Beobachtungsstelle ist hier die Löthstelle der früher getrennten Enden der Hauptleitungen; die zweite ist von der ersten 79 cm entfernt, und jede folgende Beobachtungsstelle liegt 30 cm von der vorhergehenden.

1) Dies wird offenbar der Fall sein, wenn die Dimensionen des Gleitcontactes und der ersten Mikrometerkugel nebst dem dieselben verbindenden Leitungsdrähte hinreichend klein sind.



## Zur Theorie.

22. Die in  
Resultate schließ-  
mären Leiter be-  
Schwingungen an  
Collectorplatten

zug längs den 30 m langen Drähten hervorbringt.

Als zu Grunde liegende Voraussetzung der mathematischen Behandlung nehmen wir an, dass die an jeder Stelle gemessene Schlagweite dem Maximum des Potentials der Stelle entspricht.

Das Potential eines Punktes  $X$ , durch den direct fortschreitenden Wellenzug hervorgerufen, nennen wir  $V_{(x)}$ , wo nach der Hypothese  $V$  folgende Form haben soll:

$$V = A_1 e^{-a_1 t - a_1 x} \sin(a t + a_1 x),$$

wo

$$\frac{a}{a_1} = \frac{a}{a_1} = v,$$

indem man annimmt, dass die Bewegung gerade den Nullpunkt um die Zeit  $t = 0$  erreicht. — In jedem Punkt ist:

$$V' = 0 \text{ bis } t = -\frac{x}{v}.$$

Das durch den von  $E$  reflectirten Wellenzug hervorgerufene Potential wird durch:

$$V'' = A_2 e^{-a_1 t + a_1 x} \sin(a t - a_1 x)$$

bestimmt, indem man einen möglichen Ausstrahlungsverlust durch die Reflexion voraussetzt.

In dem Punkt  $X$  ist

$$V'' = 0 \text{ bis } t = \frac{x}{v}.$$

Man hätte auch einen zu bestimmenden Phasenverlust ohne erhebliche Erschwerung mitrechnen können, allein die Formeln werden weitläufig. Die Vergleichung der Theorie mit den Versuchsergebnissen ergibt übrigens, dass kein bemerkenswerther Phasenverlust bei frei endenden Leitungen stattfindet.

Das vollständige Potential eines Punktes  $X$  wird also dadurch bestimmt, dass

$$V = 0 \text{ bis } t = -\frac{x}{v},$$

$V = V'$  zwischen den Zeiten  $t = -x/v$  und  $t = x/v$  und endlich  $V = V' + V''$  für jede folgende Epoche.

Die Aufgabe ist nun  $V_{\max}$ , einem willkürlichen  $x$  entsprechend, zu finden. Wir haben dann  $V_{\max}$  sowohl vor als nach der Zeit  $t = x/v$  zu untersuchen.

Zur Lösung des ersteren Theiles der Aufgabe sucht man  $V'_{\max}$  und findet:

$$V'_{\max} = A_1 e^{-\frac{a}{\alpha} \arctan\left(\frac{a}{\alpha}\right)} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + \alpha^2}}.$$

Der Werth ist, wie man erwarten konnte, von  $x$  unabhängig, das grösste Maximum, der Höhe des ersten fortschreitenden Wellenberges entsprechend, tritt für einen Bogen im ersten Quadranten ein, die nachfolgenden durch Addition von

$$k \cdot \pi \quad (k = 1, 2, 3 \dots).$$

Für das Folgende ist die Formel zu verwenden:

$$V''_{\max} = A_2 e^{-\frac{a}{\alpha} \arctan\left(\frac{a}{\alpha}\right)} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + \alpha^2}}.$$

Nach der Zeit  $t = x/v$  ist  $V = V' + V''$ , und es gilt, das Maximum dieser Function zu finden.

$dV/dt = 0$  führt zu folgender Bestimmung von  $t$  (die Zeit des eintretenden Maximums oder Minimums):

$$\operatorname{tg}(at + a_1 x) = \frac{A_1 a e^{-a_1 x} + A_2 a e^{a_1 x} \cos 2a_1 x + A_2 \alpha e^{a_1 x} \sin 2a_1 x}{A_1 \alpha e^{-a_1 x} - A_2 a e^{a_1 x} \sin 2a_1 x + A_2 \alpha e^{a_1 x} \cos 2a_1 x} = \operatorname{tg} \varphi \dots (\varphi),$$

indem man setzt:

$$at + a_1 x = a_1 (vt + x) = \varphi.$$

Demnach wird:

$$V_{\max} = A_1 e^{-\frac{a}{\alpha} \varphi} \sin \varphi + A_2 e^{-\frac{a}{\alpha} (\varphi - 2a_1 x)} \sin (\varphi - 2a_1 x).$$

23. Wir wollen das Verhältniss in einem Punkte  $P$  discutiren.

Wird  $x = p$  in die Gleichung  $(\varphi)$  eingeführt, so erhalten wir eine Bestimmung von  $\operatorname{tg} \varphi$  an der betreffenden Stelle. — Der erste zulässige positive Bogen ( $t$  muss ja  $> p/v$ ), welcher die Gleichung befriedigt, sei  $\varphi_0$ , also:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 a e^{-a_1 p} + \dots}{A_1 \alpha e^{-a_1 p} + \dots}.$$

Je nachdem der Werth von  $t$  wächst, werden auch die Bogen

$(\varphi_0 + \pi)$ ,  $(\varphi_0 + 2\pi)$ ,  $(\varphi_0 + 3\pi)$  etc. befriedigen, und führt man dieselben in  $V_{\varphi_0}$  ein, so erhält man:

$$V_{\varphi_0} = A_1 e^{-\frac{\alpha}{a} \varphi_0} \sin \varphi_0 + A_2 e^{-\frac{\alpha}{a} \varphi_0}$$

$$V_{\varphi_0 + \pi} = -e^{-\frac{\alpha}{a} \pi} \cdot V_{\varphi_0}$$

$$V_{\varphi_0 + 2\pi} = -e^{-\frac{2\pi}{a}} \cdot V_{\varphi_0} \text{ etc.}$$

Das Potential in einem Punkt seines anfänglichen Werth um die ersten Maximum- oder Minimumwerth  $V_{\varphi_0}$  hat. Die nachfolgenden lassen uns nicht, weil die Zahlenwerthe

Dagegen ist zu untersuchen, welcher Werth von  $V$  um die Zeit  $t = p/v$  oder  $p/v$

24. Für ein beliebiges  $x$  haben

$$(I) \quad \begin{cases} V_{\max} = A_1 e^{-\frac{\alpha}{a} \varphi_0} \sin \varphi_0 + A_2 e^{-\frac{\alpha}{a} \varphi_0} \\ \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \alpha e^{-\alpha_1 x} + A_2 \alpha e^{\alpha_1 x} \cos 2\alpha_1 x}{A_1 \alpha e^{-\alpha_1 x} - A_2 \alpha e^{\alpha_1 x} \sin 2\alpha_1 x} \end{cases}$$

wo  $\varphi_0$  der erste zulässige Bogen ist

Durch Elimination des  $t$  aus den Gleichungen (I) erhält man  $V_{\max}$  als Function von  $x$  allein bekommen, aber nichts gewonnen.

Dagegen lässt sich exact bestimmen die größten und kleinsten Werthe längs des Drahtes, welche die Werthe selbst.

Wir setzen  $dV_{\max}/dx = 0$  und durch Multiplication mit  $e^{-\frac{\alpha}{a} \varphi_0}$  (vorherige Gleichung) und dann die entsprechenden Grenzenmaximum

$$\begin{aligned} & \left[ A_1 \left( -\frac{\alpha}{a} \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 \right) + A_2 e^{2\alpha_1 x} \right. \\ & \quad \left. + \cos (\varphi_0 - 2\alpha_1 x) \right. \\ & \quad \left. \left( -\frac{\alpha}{a} \sin (\varphi_0 - 2\alpha_1 x) \right) \right] \end{aligned}$$

Nach einer etwas weitläufigen, aber einfachen Rechnung findet man:



$$\frac{d\varphi_0}{dx} = 2a_1 A_2 \frac{A_1 \left( \frac{a}{a^2} \sin 2a_1 x + \cos 2a_1 x \right) + A_2 e^{2a_1 x}}{A_1^2 e^{-2a_1 x} + 2 A_1 A_2 \cos 2a_1 x + A_2^2 e^{2a_1 x}}.$$

Wenn man dieses in obenstehende Gleichung einsetzt, erhält man nach dem Ordnen:

$$\begin{aligned} & -\frac{a}{a^2} \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 \left[ A_1 \frac{a}{a^2} \sin(\varphi_0 - 2a_1 x) + \cos(\varphi_0 - 2a_1 x) + A_2 e^{2a_1 x} \right] \\ & - \frac{a}{a^2} \sin(\varphi_0 - 2a_1 x) + \cos(\varphi_0 - 2a_1 x) \left[ A_1 + A_2 e^{2a_1 x} \left( -\frac{a}{a^2} \sin 2a_1 x + \cos 2a_1 x \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

Wir reduciren zunächst die mit dem gebrochenen Striche bezeichneten Werthe bedeutend und erhalten:

$$\begin{aligned} & - A_1^2 \sin \varphi_0 \sin 2a_1 x \left( \frac{a^2}{a^2} + 1 \right) + A_1 A_2 e^{2a_1 x} \left( -\frac{a}{a^2} \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 \right) \\ & \div A_1 A_2 e^{2a_1 x} \left[ \frac{a}{a^2} \sin(\varphi_0 - 2a_1 x) - \cos(\varphi_0 - 2a_1 x) \right] \left[ \frac{a}{a^2} \sin 2a_1 x - \cos 2a_1 x \right] = 0. \end{aligned}$$

Der berechnete Werth wird weiter reducirt und man erhält:

$$\begin{aligned} & - A_1^2 \sin \varphi_0 \sin 2a_1 x \left( \frac{a^2}{a^2} + 1 \right) + A_1 A_2 e^{2a_1 x} \left( -\frac{a}{a^2} \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 \right) \\ & \div A_1 A_2 e^{2a_1 x} \left[ \sin(\varphi_0 - 2a_1 x) \cdot \sin 2a_1 x \cdot \left( \frac{a^2}{a^2} + 1 \right) - \frac{a}{a^2} \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 \right] = 0. \end{aligned}$$

also wieder:

$$\begin{aligned} & - A_1^2 \sin \varphi_0 \sin 2a_1 x \left( \frac{a^2}{a^2} + 1 \right) \\ & - A_1 A_2 e^{2a_1 x} \sin(\varphi_0 - 2a_1 x) \sin 2a_1 x \left( \frac{a^2}{a^2} + 1 \right) = 0, \end{aligned}$$

welches sich weiter so auflöst:

$$\sin 2a_1 x = 0$$

oder

$$A_1 \sin \varphi_0 + A_2 e^{2a_1 x} \sin(\varphi_0 - 2a_1 x) = 0.$$

25. Betrachten wir zuerst, ob die letztere Gleichung im allgemeinen für reelle endliche  $x$  befriedigt wird. Aus der Gleichung folgt:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_2 e^{a_1 x} \cdot \sin 2a_1 x}{A_1 e^{-a_1 x} + A_2 e^{a_1 x} \cos 2a_1 x}.$$

Wird dieser Bruch mit demjenigen verglichen, der  $\operatorname{tg} \varphi_0$  in dem System (I) angibt, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{A_2 e^{a_1 x} \sin 2 a_1 x}{A_1 e^{-a_1 x} + A_2 e^{a_1 x} \cos 2 a_1 x} = \frac{A_1 \frac{a}{\alpha} e^{-a_1 x} + A_2 \frac{a}{\alpha} e^{a_1 x} \cos 2 a_1 x}{-\frac{a}{\alpha} A_2 e^{a_1 x} \sin 2 a_1 x},$$

woraus:

$$A_2^2 e^{2 a_1 x} + 2 A_1 A_2 \cos 2 a_1 x + A_1^2 e^{-2 a_1 x} = 0.$$

Die linke Seite der Gleichung entspricht gerade  $\gamma^2$ , wo  $\gamma$  die Diagonale ist in einem Parallelogramme mit den Seiten  $A_1 e^{-a_1 x}$ ,  $A_2 e^{a_1 x}$  und dem dazwischenliegenden Winkel  $2 a_1 x$ .

Wenn alles reell sein soll, kann hier die Diagonale nur dann 0 werden, wenn:

$$(1) \quad A_2 e^{a_1 x} = A_1 e^{-a_1 x} = 0$$

oder

$$(2) \quad A_2 e^{a_1 x} = A_1 e^{-a_1 x} \text{ und } \cos 2 a_1 x = \div 1.$$

Das erste System ist unmöglich. Das zweite System wird in der Regel nicht gleichzeitig befriedigt; sollte dies gleichwohl eintreffen, so hat man nur einen speciellen Fall der Gleichung:

$$\sin 2 a_1 x = 0,$$

welcher somit die höchsten und niedrigsten Werthe für  $V_{\max}$  allein bestimmt.

Die Gleichung wird befriedigt, wenn:

$$x = \frac{k \pi}{2 a_1} \quad (k = 0, 1, 2, 3 \dots).$$

Werden diese Werthe in den Ausdruck für  $\operatorname{tg} \varphi_0$  (I) eingesetzt, so erhält man immer:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{a}{\alpha},$$

und es gilt dann die Bogen zu bestimmen, welche jedem der Werthe für  $x$  entsprechen.

$$\varphi_0 = (at + a_1 x)$$

soll eine solche Grösse haben, dass die dadurch bestimmte Zeit  $t > x/v$  wird.

Wir setzen folglich:

$$t = \frac{a_1}{a} x + \tau,$$

wo  $\tau$  positiv und möglichst klein sein soll.

Demnach wird:

$$(\tau) \dots \operatorname{tg} \varphi_0 = \operatorname{tg} (a \tau + 2a_1 x) = \frac{a}{a_1}$$

für sämtliche Werthe

$$x = \frac{k \pi}{2 a_1}.$$

$x = 0$  entspricht offenbar ein Bogen im ersten Quadrant, sodass

$$a \tau_0 = \operatorname{arc} \left( \operatorname{tg} = \frac{a}{a_1} \right).$$

Lässt man nun einen anderen den Werth  $k \pi / 2a_1$  annehmen, so sieht man, dass der kleinste Bogen  $a \tau$ , welcher die Gleichung  $(\tau)$  befriedigt, immer noch  $a \tau_0$  bleibt.

$$x = 0 \text{ entspricht folglich } \varphi_0 = a \tau_0$$

$$x = \frac{\pi}{2 a_1} \quad , \quad , \quad \varphi_0 = a \tau_0 + \pi$$

$$x = \frac{2 \pi}{2 a_1} \quad , \quad , \quad \varphi_0 = a \tau_0 + 2 \pi \text{ u. s. w.}$$

Wird dieses in  $V_{\max}$  eingeführt, so erhält man für

$x = 0$	$V_{\max} = V'_{\max} + V''_{\max}$
$x = \frac{\pi}{2 a_1}$	$V_{\max} = - V'_{\max} \cdot e^{-\frac{a}{a_1} \pi} + V''_{\max}$
$x = \frac{2 \pi}{2 a_1}$	$V_{\max} = + V'_{\max} \cdot e^{-\frac{2 a}{a_1} \pi} + V''_{\max}$
$x = \frac{3 \pi}{2 a_1}$	$V_{\max} = - V'_{\max} \cdot e^{-\frac{3 a}{a_1} \pi} + V''_{\max} \text{ u. s. w.}$

$V_{\max}$  nähert sich also dem  $V''_{\max}$  als Grenze.

Die grössten Ausschläge nach beiden Seiten von  $V''_{\max}$  nehmen exponentiell ab mit einem Dämpfungsverhältniss  $e^{-2 \pi a / a_1}$ , dem Verhältniss bei dem einfallenden Wellenzug ähnlich, während der Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Maxima  $-\pi / a_1 =$  genau die Hälfte der Wellenlänge des einfallenden Zuges ist.

26. Wir gehen nunmehr dazu über, dieses theoretische Resultat mit dem experimentell gefundenen zu vergleichen.

Vor der Zeit  $t = x / v$  war  $V_{\max}$  constant  $= V'_{\max}$ . Mit derselben Interpretation wie in den Fig. 2 und 3 wird  $V_{\max}$

folglich durch eine gerade Linie parallel mit dem Faden vor-  
treten sein. Diese finden wir offenbar  
Partieen wieder, welche in demselben l  
mentellen Curve liegen.

Hierdurch wird also

$$V_{\max} = A_1 e^{-\frac{\alpha}{2} x} \left( \cos - \frac{\alpha}{2} \right),$$

bestimmt.

Zunächst soll nach der Zeit  $t = x /$

$$V_{\max} = V'_{\max} + V''_{\max}$$

sein, wodurch  $V''_{\max}$ , also auch das Reflex  
bestimmt ist.

Der Abstand aufeinander folgender  
als Mittelzahl der Abstände zwischen de  
mentellen Curve zu bestimmen, und das  
so festzustellen, dass die theoretischen  
sich den experimentellen möglichst nahe

Führt man den Vergleich aus, so wir  
tate gelangen, dass der einfallende Well  
meter gehabt hat:

Die Wellenlänge  $\lambda = 7,6$  m, das  
 $D = 0,7$  und  $A_2 / A_1 = 0,65$ .

Mit diesen Constanten sind die Ma  
theoretischen Curve Fig. 3 als von klein  
Punkte dargestellt.

Die gestrichelte Curve zeigt den Ver  
retischen Curve in diesem Falle; sie w  
sieht, nicht ganz regelmässig zwischen  
niedrigsten Punkten.

Die punktirte Curve gibt das Poten  
an gerade in dem Augenblick, wo  $V''$  an  
chung derselben erhält man, wenn man in  
 $t = x / v$  setzt, also:

$$V''_{t = \frac{x}{v}} = A_1 e^{-2\alpha \cdot x} \sin 2$$

was geometrisch eine Wellenlinie von de  
des einfallenden Wellenzuges gibt, nur a  
die halben Werthe zusammengedrückt.



Man kann das Verhältniss verändern, wenn man den Abstand des einen Plattenpaares (die primäre Platte mit dazu gehörender Collectorplatte) grösser macht als den des zweiten. Dadurch erzielt man einen kräftigeren Wellenzug in der einen Hauptleitung, als in der zweiten, was sich bei Messungen im Punkt *E* augenblicklich kundgibt, indem man durch das Telephon Funken bis auf ca. 0,5 Mikron hinab nachweisen kann.

Die Uebereinstimmung der Versuche mit der Theorie bei den im Vorhergehenden behandelten Untersuchungen ist demnach befriedigend.

Die in der Fig. 3 am meisten hervortretenden Abweichungen, sowie der Umstand bei der Fig. 4, dass der erste Wellenberg viel zu niedrig ist, können nicht directen Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden; ausserdem lassen sie sich qualitativ ganz einfach durch das Eingreifen solcher Verhältnisse erklären, die in die mathematische Behandlung nicht aufgenommen werden konnten.

Die Theorie bezieht sich auf die Potentiale der Hauptleitung selber, während die Experimente die Potentiale derjenigen Mikrometerkugel betreffen, die durch einen 3 cm langen, sehr dünnen Neusilberdraht damit in Verbindung steht, und es ergibt sich aus der Uebereinstimmung, wie merkwürdig schnell das Potential der kleinen Polkugel den gewaltsamen Potentialveränderungen der Hauptleitung hat folgen können.

Beispielsweise wollen wir das Verhältniss etwas näher betrachten, wodurch die oben erwähnte Anomalie bei der Fig. 4 wahrscheinlich bewirkt wird.

Graphisch lässt sich das Verhältniss leicht aus Fig. 5 ersehen. *E* ist die Löthstelle der beiden Hauptleitungen; auf der linken Seite derselben ist der durch die eine Hauptleitung kommende Wellenzug dargestellt, auf der rechten Seite ist der durch die zweite Hauptleitung kommende punktirt.

Der Zustand entspricht der Zeit  $t = 0$ . In dem Punkt *P* hat man den Gipfel des ersten Wellenberges der stehenden Schwingungen und das Maximum tritt um eine halbe Schwingungsdauer nach dem verzeichneten Zustand ein.

Demnach erhält die kleine Mikrometerkugel anfangs ein grosses positives Potential, um sodann nach etwas über eine hundertmilliontel Secunde ein noch niedrigeres negatives an-



Verhältnisse zwischen der reflectirten und hält sich gewiss fast unverändert, abgesehen jedenfalls solange sich diese über einen Werth hält.

So einfach wie bei dem eben Vorausgesetzten ist das Verhältnisse nicht bei den Versuchsserien. Viel spricht indes dafür, dass diejenige Polkugel, die mit der Hauptleitung in Verbindung steht, durch ihre Capacität sowie durch den gewissen bedeutenden Verschiebungsstrom zu der sehr nahe liegenden zweiten Polkugel ein Verhältnisse herstellt, welches dem oben hypothetisch erwähnten zum Theil ähnlich ist.

Dass man bei diesem bei  $E$  stattfindenden Verlust nicht einem ähnlichen Phänomen gegenübersteht, wie wenn ein stark geladener Leiter durch Spitzen und Rauhigkeiten seine Electricität an die Luft abgibt, ist besonders untersucht worden.

Das Verhältnisse  $A_2/A_1$  wurde sehr genau dasselbe gefunden, mochte die Hauptleitung in einer wohl abgerundeten Zinkkugel oder in einer scharfen Stahlspitze enden.

Ich werde später vollständigere Untersuchungen in Bezug auf die Reflexion ausführen, um gewisse wichtige Fragen dadurch klar zu machen.

#### Anhang.

*Resultate, bei Wiederholung der Versuche der Hrn. Sarasin und de la Rive.*

Ich erlaube mir vorläufig einige neue Resultate mitzutheilen, die durch Wiederholung der Versuche der Hrn. Sarasin und de la Rive mit Hülfe eines secundären Rahmens mit Telephon (vgl. Art. 2) erlangt sind.

Die Anordnung war ungefähr dieselbe wie ad Fig. 1 beschriebene und stimmt also bis auf meinen secundären Leiter im Wesentlichen mit der der genannten Physiker überein.

Bei dem Wagen  $W$  ist die Veränderung eingetreten, dass das Mikrometer  $M$  entfernt und an seiner Stelle ein secundärer Rahmen an dem verticalen Brett befestigt ist.

Die Hauptleitungen werden durch Löcher im Holzgestelle des Wagens geführt, sodass der Abstand von dem secundären Rahmen zu den Drähten immer unverändert bleibt.





fast ganz ähnlich befunden war, wurden unveränderliche Abstände bis zum Grenzabstande gefunden.

Alle Verhältnisse blieben unverändert, wenn an die freien Enden der Hauptleitung zwei gleich lange Drahtstücke in directer Verlängerung angelöthet wurden, nur verschoben sich alle Knoten gegen die freien Enden um eine der Länge der angelötheten Stücke entsprechende Strecke.

Dagegen näherten sich die Knoten immer schneller der Aequidistanz, wenn man an den freien Enden  $E$  Metallplatten von immer grösseren Dimensionen befestigte.

In einer späteren Abhandlung werde ich die hier berührten Phänomene ausführlicher sowohl experimentell als mathematisch behandeln.

Kristiania, Ende September 1892.

---



so sind die Verhältnisse in beiden Stromkreisen dieselben; die durch das Telephon gehenden Ströme sind gleich und entgegengesetzt gerichtet, sodass ihre Wirkungen auf den Magnet desselben sich aufheben.

Wird in einem der beiden Stromkreise die Capacität des Condensators und der Widerstand des Rheostaten in umgekehrtem Verhältnisse verändert, sodass die Capacität  $n$  mal kleiner, der Widerstand  $n$  mal grösser wird, dann bleibt die Stromverzweigung unverändert, und es tritt kein Geräusch im Telephon auf.

Bezeichnet man also mit  $C_1$  und  $C_2$  die Capacitäten der Condensatoren, so schweigt das Telephon, wenn folgende Proportion stattfindet:

$$C_1 : C_2 = W_2 : W_1.$$

Als den einen Condensator schaltet man den zur Flüssigkeitsaufnahme bestimmten Condensator ein, als anderen einen constanten Condensator. Dann bestimmt man das Verhältniss der Capacitäten für die beiden Fälle, dass Luft und dass eine Flüssigkeit mit der D.-C.  $D$  dielectricische Zwischenschicht bei ersterem ist. Ist seine Capacität im ersten Falle  $= C_1$ , so ist sie im zweiten  $= D \cdot C_1$ ; die Capacität des constanten Condensators sei  $= C_2$ ; dann erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned} C_1 : C_2 &= W_2' : W_1' \\ D \cdot C_1 : C_2 &= W_2'' : W_1'' \\ D &= \frac{W_2'}{W_1''} \cdot \frac{W_1'}{W_2''} \end{aligned}$$

Die Abgleichung mittels der Widerstände erfolgte derart, dass der eine Vergleichswiderstand über das thatsächliche Tonminimum hinaus verändert wurde, bis das Telephon wieder einen deutlichen Ton gab, und dann nach der entgegengesetzten Richtung wieder derjenige Widerstand bestimmt wurde, bei dem der Ton mit derselben Stärke und Klangfarbe erschien; das Mittel aus beiden Werthen wurde als der dem Minimum entsprechende Werth angenommen. Als Vergleichswiderstände wurden Siemens'sche Rheostaten benutzt.

Bevor mit Hülfe der Methoden Bestimmungen ausgeführt wurden, wurde eine Reihe von Messungen vorgenommen, die den Zweck hatten:



bestimmten Werthe sehr nahe den direct gemessenen Werth

Hieraus folgt, dass die Verschiebung des Kohlrausch'schen Condensators, die bei vollständiger Gleichheit der Stromkreise auftreten würde, dadurch erhalten wird, dass man die Messung nach Vertauschung der Condensatoren wiederholt und aus den beiden gefundenen Werthen das Mittel nimmt. Dies muss im allgemeinen geschehen, wenn man die Capacität zweier Condensatoren vergleicht, indem man dieselben nach einander zu einem constanten Condensator in dem einen Stromkreise hinschaltet und die entsprechenden Verschiebungen des Vergleichscondensators misst.

Bleibt bei den Messungen der eine Differentialzweig ungeändert, wie dies bei der Untersuchung fester Körper der Fall ist, so ist dagegen eine Vertauschung der Condensatoren nicht erforderlich, denn man hat jedesmal dieselbe Abweichung vom Mittelwerthe.



denatoren bei gleichem Pl wurde die Plattenentfernung zu  $a + d$  und  $a + d_1$  verg nach beiden Methoden gemes ergab es sich direct als da des anderen Condensators. man durch das Verhältniss hältnisse  $(a + d)/a$  und  $(a + d_1)/a$ .

Tabelle III.

A.

$d$				$d_1$			
N	$S_1$	$S-S_1$	M	N	$S_1$	$S-S_1$	M
9,859	9,140	0,719	0,720	9,874	8,836	1,038	1,040
9,865	9,143	0,722		9,868	8,837	1,031	
9,864	9,144	0,720		9,875	8,838	1,037	

$$d/d_1 = \frac{1,04}{0,72} = 1,44.$$

B.

$a_1/a_2$	$W_1/W_2$	M
$\frac{a+d}{a}$	$\frac{300}{67,5} = 4,44$	4,44
	$\frac{200}{45} = 4,44$	
	$\frac{100}{22,5} = 4,44$	
$\frac{a+d_1}{a}$	$\frac{300}{51} = 5,88$	5,88
	$\frac{200}{34} = 5,88$	
	$\frac{100}{17} = 5,88$	

$$\begin{aligned} (a+d)/a &= 4,44 & (a+d_1)/a &= 5,88 \\ d/a &= 3,44 & d_1/a &= 4,88 \end{aligned}$$

$$d/d_1 = \frac{4,88}{3,44} = 1,42.$$





## II. Flüssigkeiten.

Von Flüssigkeiten wurden untersucht: Petroleum, Petroleumäther, Terpentinöl, Xylol, Toluol.

$x_1$  bedeutet die Entfernung der Platten, bei welcher der Verschiebungscondensator den leeren d. h. den Luft enthaltenden Flüssigkeitscondensator ersetzt;  $x_2$  gibt die Entfernung der Platten an, bei der die Capacität des Verschiebungscondensators der Capacität des gefüllten Flüssigkeitscondensators gleich ist. Der Quotient  $x_1/x_2$  ergibt die Dielectricitätsconstante  $D$  der Flüssigkeit.

Tabelle V.

Substanz	$x_1$	$x_2$	$D$	Werthe anderer Beobachter	
Petroleum	0,965	0,479	2,015	Hopkinson	2,10
				Cohn u. Arons	2,04
				Palas	2,090—2,193
				Winkelmann	2,14
				Lecher	2,35 u. 2,42
Petroleumäth.	0,965	0,543	1,779	—	—
Terpentinöl	0,919	0,402	2,286	Winkelmann	2,22
				Tomaszewski	2,258—2,271
Xylol	0,945	0,419	2,256	Cohn u. Arons	2,36 u. 2,37
				Tomaszewski	2,383
				Tereschin	2,35
				Hopkinson	2,39
Toluol	0,954	0,414	2,304	Palas	2,365
				Tomaszewski	2,303
				Hopkinson	2,42—2,363



densator  
gefüllte  
selbe w  
condens  
holungen

Des  
fällung  
um unge  
nahm n  
stante v  
die mit  
0,04 mm  
hätten l  
des Alk  
verdeckt

Es  
an den  
ein and

**Zu**

Condens  
innere  
ein etwa  
bis zur  
entsprach  
Condens  
dieselbe  
Metallbe  
Um den  
Platten  
säure, d

eingefüllt und die Messung ausgeführt, worauf wurde der  
Messingcylinder ganz weggenommen, die Innenwand des Glases  
entsprechend dem äusseren Belage mit Stanniol belegt und für  
diesen Condensator die Plattenverschiebung des Kohlrausch'schen  
Condensators bestimmt. In beiden Fällen wurde der obige  
Werth von 0,059 mm mit geringen im Bereiche der Beobachtungs-  
fehler liegenden Abweichungen gefunden. Alkohol verhielt sich  
demnach wieder wie ein guter Leiter.

1) Doppelcylinder aus Messing.



$A_1$  wurde an Erde abgeleitet,  $E_1$  mit  $A_2$  verbunden und der Strom von  $E_2$  zwischen zwei Condensatoren verzweigt, deren andere Platten durch ein Telephon verbunden wurden. (Fig. 2.) Besaßen diese beiden Platten gleiche Capacitäten, so schwieg das Telephon.

Auf die eine Seite wurde nun der Vergleichscondensator, auf die andere Seite ein unveränderlicher Condensator geschaltet und abgeglichen. Hierauf wurden zum constanten Condensator die verschiedenen Flüssigkeitscondensatoren, einmal mit Alkohol dann mit verdünnter Schwefelsäure gefüllt, hinzugeschaltet und die entsprechenden Aenderungen der Plattenentfernung vom Kohlrausch'schen Condensator ge-

gemessen. Auch auf diese Weise zeigte sich kein Unterschied in dem Verhalten von Alkohol und verdünnter Schwefelsäure.

Um dem Winkelmann'schen Verfahren noch näher zu kommen, wurde schliesslich ein Condensator zur Aufnahme von Flüssigkeiten construirt, dessen Beläge gleiche Grösse hatten wie die Plattenflächen des Vergleichscondensators.

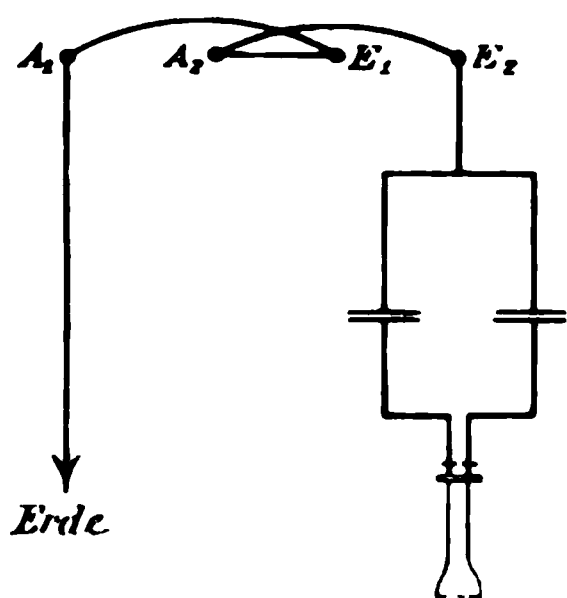


Fig. 2.

Von zwei Spiegeln wurde der Quecksilberbelag bis auf kreisförmige Flächen von jener Grösse entfernt. Der grössere dieser beiden Spiegel wurde mit dem Belage nach unten gekehrt horizontal auf drei Hartgummifüsschen gelegt. Um den Rand der oberen Seite wurden dicke Glasstreifen gekittet, sodass ein Trog entstand. In denselben wurde unter Zwischentügen von drei kleinen gleichdicken Glasstückchen der andere Spiegel gelegt, sodass sein Belag nach oben gekehrt war und dem anderen Belage genau gegenüber stand.

Die mittlere Dicke des Zwischenraumes zwischen den Glasplatten sei  $d$ . Wird nun dieser Condensator durch den Kohlrausch'schen Condensator mittelst der zuletzt angegebenen Schaltungsweise abgeglichen, dann zwischen die Glasplatten eine Flüssigkeit eingefüllt und wieder abgeglichen und ist hierzu eine Verschiebung um  $x$  nöthig, so ist die Dielectricitätsconstante der Flüssigkeit nach der „Gordon'schen Formel“  $D = d/(d - x)$ .



## VI. Ueber Widerstandsmessungen mit Hilfe des Telephons; von Max Wien.

(Hierzu Tafel VIII Fig. 7—11.)

In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> habe ich einige Bemerkungen darüber gemacht, dass in gewissen Fällen die Brückeneinstellungen mit dem Hörtelefon bedenklich seien und zu Fehlern Veranlassung geben könnten.

Hr. A. Elsas<sup>2)</sup> hat diese Bemerkungen durch Versuche zu entkräften versucht, welche mit dem Differentialinductor<sup>3)</sup> angestellt wurden; ich sehe mich deshalb genöthigt, mich nochmals etwas eingehender mit dieser Frage zu beschäftigen.

Bei den meisten Einstellungen mit dem Hörtelefon erreicht man nicht ein vollständiges Verschwinden des Tones, sondern nur ein Minimum. Der Grund dieser Erscheinung ist, dass neue electromotorische Kräfte in einem der Zweige auftreten, die durch Selbstinduction oder gegenseitige Induction, Capacität oder Polarisation verursacht sind.

Die Fragen, um die es sich handelt, sind folgende:

1. Fällt dieses Minimum mit dem gesuchten Nullpunkte (bei der Brücke  $w_1 w_4 = w_2 w_3$ ) zusammen?
2. Ist dieses nicht der Fall, wie hängt die Lage des Minimums von der Periode des Stromes ab?
3. Welchen Einfluss haben die Obertöne, welche, wenn man ein Inductorium als Stromquelle benutzt, immer im Telephonklange vorhanden sind (vgl. unten p. 637), auf die Minimumeinstellung?

Die Fragen sollen zuerst theoretisch behandelt werden. Ein Sinusstrom mit  $n$  Schwingungen in  $2\pi$  Secunden gehe durch

---

1) M. Wien, Wied. Ann. 42. p. 615—617. 1891.

2) A. Elsas, Wied. Ann. 44. p. 666. 1891.

3) A. Elsas, Wied. Ann. 35. p. 828. 1888; 42. p. 165. 1891.



die Wheatstone'sche Brücke (Taf. VIII, Fig. 7). Dann ist die Stromamplitude im Brückenzweige in der Nähe des Nullpunktes<sup>1)</sup>:

$$\alpha \text{ proportional Mod } (a_1 a_4 - a_2 a_3),$$

worin  $a_1, a_2, a_3, a_4$  die Widerstandsoperatoren der Zweige 1, 2, 3, 4 der Brücke sind.

Der Zweig 1 enthalte die merkliche Selbstinduction  $p$ , dann ist

$$\alpha^2 \text{ prop. } (w_1 w_4 - w_2 w_3)^2 + n^2 p^2 w_4^2,$$

oder, wenn man  $\delta$ , die Abweichung des Schleifcontactes vom Nullpunkt einführt:

$$\alpha^2 \text{ prop. } \delta^2 (w_1 + w_2)^2 + n^2 p^2 (w_4 - \delta)^2.$$

Indem wir  $\partial \alpha^2 / \partial \delta = 0$  setzen, erhalten wir die Abweichung  $\delta_1$  des Minimums vom Nullpunkt:

$$\frac{\delta_1}{w_4} = \left( \frac{n p}{w_1 + w_2} \right)^2,$$

oder der Einfachheit halber  $\delta_1 / w_4 = \Delta$  und  $w_1 = w_2 = w$

$$\Delta = \left( \frac{n p}{2 w} \right)^2.$$

Analog, wenn im Zweig 1 ein Condensator mit der Capacität  $C$  || geschaltet ist:

$$\Delta = - \left( \frac{n C w}{2} \right)^2.$$

Bei einer Flüssigkeitsstelle, deren Electroden die Capacität  $c$  haben:

$$\Delta = \left( \frac{1}{2 n c w} \right)^2.$$

Die Intensität im Minimum  $\alpha_1^2$  ist, solange  $\Delta$  klein, proportional  $\Delta$ .

Es folgt hieraus, dass bei der Wheatstone'schen Brücke Minimum und Nullpunkt nicht zusammenfallen, sondern um  $\Delta$  voneinander abweichen. Wir haben es hier also mit einem „methodischen“ Fehler zu thun, neben dem zufälligen „Einstellungs“fehler, der hier deshalb erheblich ist, weil man auf ein Minimum schlecht einstellen kann. Dieser Einstellungs-

4) In betreff der folgenden Formeln vgl. M. Wien, l. c. p. 603—606 und Wied. Ann. 44. p. 690—693. 1891.

fehler wird um so grösser, je grösser der methodische Fehler  $\Delta$  ist; da, wie wächst, und die Zwischen den beiden unterscheiden. zwar ist es bei proportional  $n^2$ , 1

Damit sind  
stone'sche Brück

Formeln und Versuche aufein gehen.

Anders liegt die Sache bei dem *Differentialinductor*, mit dem die Versuche des Hrn. Elias ausgeführt wurden.

Derselbe besteht aus einer primären gleichen secundären. Diese beiden letz Fig. 8 ersichtlich, mit dem zu messende gleichewiderstand (2) verbunden. Wenn die inducirte electromotorische Kraft in selbe ist, so ist die Stromamplitude  $\alpha$  : der Nähe des Nullpunktes:

$$\alpha \text{ prop. Mod. } (a_1 - a_2).$$

Hierin ist (vgl. Fig. 9), indem der Einfachheit halber die gegenseitige Induction nicht berücksichtigt wird:

$$a_1 = W_1 + w_1 + in(P_1 + p), \quad a_2 = W_2 + w_2 \text{ in } P_2.$$

$W_1 = W_2$ ,  $P_1 = P_2$  Widerstand und Selbstpotential der beiden secundären Rollen.  $w_1$  und  $w_2$  der zu messende und der Vergleichswiderstand; ersterer habe die merkliche Selbstinduction  $p$ .

Dann ist:

$$\alpha^2 \text{ prop. } (w_1 - w_2)^2 + n^2 p^2.$$

Offenbar ein Minimum für  $w_1 = w_2$ , also fällt Minimum und wahrer Nullpunkt zusammen.  $\Delta = 0$ .

Bei einer || geschalteten Capacität:

$$\alpha^2 \text{ prop. } (w_1 - w_2)^2 + n^2 C^2 w_1^2 w_2^2. \quad \Delta = 0.$$

Bei einem Flüssigkeitswiderstand:

$$\alpha^2 \text{ prop. } (w_1 - w_2)^2 - \frac{1}{n^2 w^2 c^2}. \quad \Delta = 0.$$



strommaschine arbeiteten, bei grossen Neusilberwiderständen, welche wohl nicht sehr sorgfältig gewickelt waren, Abweichungen bis zu 20 Proc. vom Nullpunkt. In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> habe ich diese Differenz zwischen Nullpunkt und Minimum benutzt, um mit Hülfe des optischen Telephons Selbstpotentiale von Rollen zu bestimmen. In bezug auf bifilar gewickelte Neusilberwiderstände erwähne ich noch, dass ich bei den damals benutzten Rheostaten von Hartmann & Braun und von Siemens & Halske bei Widerständen bis zu 1000 Ohm keinen merklichen Einfluss von Selbstinduction oder Capacität auf den Strom von 256 Schwingungen per Secunde habe feststellen können.

Im allgemeinen wird jedoch nicht ein Sinusstrom, sondern der Strom eines Inductoriums angewendet, dessen primäre Leitung durch einen akustischen Stromunterbrecher geöffnet und geschlossen wird.

Der Strom eines Inductoriums lässt sich als eine Summe von Sinusströmen darstellen:

$$a_1 \sin \pi t + a_2 \sin 2 \pi t + a_3 \sin 3 \pi t \dots$$

Jeder von diesen Sinusströmen geht für sich gesondert durch das System und ist im Telephon als Oberton hörbar. Dazu kommen noch die bei jeder Stromunterbrechung auftretenden, schnell verschwindenden, electrischen Eigenschwingungen des Systems, welche Lenard<sup>2)</sup> als das „Telephongeräusch“ bezeichnet und deren Schwingungszahl sehr hoch ist. — Ich komme hiermit zu der dritten Frage: Welchen Einfluss haben die *Obertöne* auf die Einstellung mit dem Hörtelephon?

Im allgemeinen sind die Amplituden dieser höheren Schwingungen viel kleiner als die des Grundstromes. Ihre Stärke hängt von dem Widerstande und den Inductionscoefficienten des Inductoriums und der Brückenverzweigung ab, ferner auch von der Art und Weise der Unterbrechung (Contact, Nebenschluss).

Hingegen ist das Hörtelephon empfindlicher für höhere Töne, theils wegen der hohen Eigentöne der Platte, theils aus

1) l. c. 1. p. 605—610.

2) Lenard, Wied. Ann. 39. p. 619. 1890.







ist es gefährlich, wenn gleichzeitig in einem der vier Zweige Selbstinduction oder  $\parallel$  geschaltete Capacität vorhanden ist, da dadurch die Minima der höheren Töne auseinandergerissen werden.  $\Delta = (np / 2w)^2$ , resp.  $-(nCw / 2)^2$ ; wegen der hohen Schwingungszahlen genügen hierzu schon kleine  $p$  und  $C$ . Die Folgen davon sind: ein verwaschenes Minimum und damit ein grosser Einstellungsfehler, und ferner auch methodische Fehler.

Es ist hierbei zu unterscheiden, ob die Selbstinduction in den Zweigen 1 und 4 oder in den Zweigen 2 und 3 der Brücke auftritt (vgl. Fig. 7, die Flüssigkeitszelle ist immer im Zweig 1 vorausgesetzt). Im ersten Falle werden die Minima der höheren Töne nach der Seite des Minimums des Grundtones hin verschoben (Fig. 11 nach rechts). Es treten also die in Fig. 10 und 11 dargestellten Erscheinungen gleichzeitig auf. Der Flüssigkeitswiderstand erscheint hier offenbar zu gross. Bei kleiner Selbstinduction ist die Einstellung noch scharf, ja sie kann sogar unter Umständen schärfer sein, wie ohne Selbstinduction<sup>1)</sup>, da die Minima mehr auf einem Haufen liegen. Bei irgend grösserer Selbstinduction z. B. der, welche genügt, um die Polarisation für den Grundton zu compensiren<sup>2)</sup>, ist keine Einstellung mehr möglich.

In dem anderen Falle Selbstinduction im Zweig 2 oder 3 werden die Minima der höheren Töne über den Nullpunkt hinaus verschoben (Fig. 11 nach links). Dadurch wird das Gesamtminimum ein sehr breites und der Einstellungsfehler sehr gross. Die Einstellung kann überall innerhalb desselben erfolgen. Wer, wie ich, sich mit der Zeit daran gewöhnt hat, das Minimum der höheren Töne aufzusuchen, dürfte meist über den Nullpunkt hinaus einstellen. Der Flüssigkeitswiderstand erscheint dann zu klein. Die Einstellung ist hier abhängig von der Person des Beobachters und von der Zusammensetzung des Inductionsstromes, also von der Reinheit der Quecksilberoberfläche des Unterbrechers etc. Dieser Fall vor allem ist bei der Messung von Flüssigkeitswiderständen zu vermeiden. Es ist zu diesem Zwecke anzurathen, von vornherein im Zweig 1 eine kleine Drahtrolle anzubringen, um die eventuell im Zweig 2

1) Wietlisbach, Berl. Monatsber. 1879. p. 278; Fink, Wied. Ann. 26. p. 492. 1885.

2) M. Wien, l. c. 1. p. 613—614.





warten. über ein sehr schlechtes Minimum im Fall 2. Der Einstellungsfehler war hier etwa der fünffache, wie in den anderen Fällen.

Der *methodische Fehler*, welcher hierbei die Verschiebung der Minima der höheren Töne durch die Selbstinduction verursacht, ist deshalb schwierig zu messen, weil er durch den Einstellungsfehler verdeckt wird, der, sowie man die Polarisation grösser nimmt, auch schnell wächst.

Es gelang in folgender Weise denselben zu beobachten: Die kleine Selbstinduction der Brückenwalze hat auf das optische Telephon, welches nur auf den Grundstrom reagirt, wie gesagt, keinen merklichen Einfluss. Demnach geschahen die Einstellungen mit demselben in den drei obigen Fällen, welche sich nur durch die Lage des Selbstpotentials unterschieden, immer unter den gleichen Verhältnissen und konnten als Fixpunkte angesehen werden. Es ergaben sich in den drei Fällen verschiedene Differenzen mit den Einstellungen des Hörtelephons, also auch Differenzen zwischen den Hörtelephoneinstellungen untereinander, mithin verschiedene Werthe für denselben Flüssigkeitswiderstand. Zwischen den Fällen 1 und 2 betrug die Differenz bei verschiedenen Beobachtern im Mittel mehr als das doppelte des Einstellungsfehlers. Im Fall 2 war, wie gesagt, der Einstellungsfehler so gross, dass die Differenz nicht zahlenmässig festgestellt werden konnte.

Bei grossen Widerständen tritt auch die electromotorische Capacität der bifilaren Neusilberdrahtrollen in Wirksamkeit. Da die Erscheinung durchaus analog ist, so brauche ich sie nicht besonders zu besprechen.

Es soll mit dem Vorstehenden kein Einwand gegen die Kohlrausch'sche Methode zur Messung von Flüssigkeitswiderständen mit Wechselstrom und Hörtelephon erhoben werden: im Gegentheil gestattet die Einstellung auf die hohen Obertöne noch bei verhältnissmässig starker Polarisation Widerstände zu messen, wo bei Anwendung von Sinusinductor und Dynamometer schon grössere Fehler sich merklich machen würden. Es sollte nur nachgewiesen werden, dass methodische Fehler auftreten *können* und die Art und Weise ihrer Entstehung klar-

1) Chaperon, Journ. de phys. (2) 9. p. 485. 1890.

gelegt werden. Dieselben sind secundärer Natur und meist klein; in meinem Falle hielten sie sich immer innerhalb 0,1 Proc. Allerdings wachsen sie schnell mit der Schwingungsdauer des Grundstromes und der Stärke der Polarisaton. „Bedenklich“ sind dieselben nur deshalb, weil sie schwer zu erkennen und ganz zu vermeiden sind, und sie innerhalb derselben Versuchsreihe, je nach der Beschaffenheit der in den drei anderen Zweigen benutzten Widerstände nach verschiedener Richtung ausfallen können.

Gefährlicher wie bei Widerstandsmessungen ist die Benutzung des Hörtelephons beim Vergleich der Selbstpotentiale von Rollen<sup>1)</sup> und der Capacitäten von Condensatoren, worauf ich schon an anderer Stelle<sup>1)</sup> hingewiesen habe.

Würzburg, Phys. Inst. d. Univ., Sept. 1892.

2) M. Wien, l. c. 2. p. 710—712.

## VII. Die Zerstreuung des Lichtes an Oberflächen<sup>1)</sup>; von Chr

(Hierzu Tafel I)

### Geschichtliches und Wesen

Zu den in dieser Abhandlung erörternden Untersuchungen über matte Körperoberflächen wurde ich durch die einfache der darstellenden Geometrie entsprechende Betrachtung der Körper mit ihren Helligkeitsgraden an ergiebigsten Quellen theoretischer Untersuchungen, welche Grundlagen für die Optik bieten, findet man immer noch in dem des vorigen Jahrhunderts, in Lambert's Optik<sup>2)</sup> und in Bouguers Optik.<sup>3)</sup> Dieselbe Theorie ist bisher kaum verwerthet worden, und in der darstellenden Geometrie<sup>4)</sup> versucht, sie zu verwerthen. Während nun, wie allgemein bekannt, die Beleuchtungsstärke eines Elementes gleich der Stärke des beleuchtenden Lichtes mit dem Quadrat seines Abstandes vom Beobachter und mit dem Cosinus des Einfallswinkels in welcher das Element dem Betrachter gegenüber steht, jener Beleuchtungsstärke und mit der Helligkeit des Elementes (Albedo bei Lambert) proportional ist, so ist die in welcher man das Element betrachtet, proportional der Beleuchtungsstärke sein. Diesen Einfluss bestimmt die Helligkeit des ihm benannte Lambert'sche oder Cosinusgesetz für ein Flächenelement, welches das Element

1) Diese und die folgende Abhandlung sind in der Festschrift der Technischen Hochschule zu Karlsruhe zum hundertjährigen Regierungsjubiläum Sr. Königliche Majestät Friedrich von Baden, im April 1892. I. Band, S. 389 ff. sind einige wenige Aenderungen vorgenommen.

2) Lambert, photometria, Augsburg 1760.

3) Bouguer, essai d'optique, Paris 1747.

4) Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Wien 1845, p. 35 und 390 ff.



von Schülern Monge's<sup>1)</sup>, dann für viele Flächen von Burmester. Diese Annahme von  $\cos \varepsilon \cdot \cos \alpha$  ist aber jedenfalls unrichtig; denn nach ihr wäre für  $\alpha = 90^\circ$ , oder für Stellen, wo die Sehstrahlen die Fläche berühren, d. i. für den Umriss, die Helligkeit gleich Null, was dem nächstliegenden Augenscheine widerspricht. — Die Annahme  $\cos \varepsilon : \cos \alpha$  wurde von Brisson<sup>2)</sup> vorgeschlagen. Nach ihr müsste der Umriss am hellsten erscheinen und wirklich beruft sich Brisson darauf, dass der Umriss des Vollmondes am hellsten erscheint, obgleich an ihm auch zugleich die Licht- und Schattengrenze liegt, also die Beleuchtungsstärke am geringsten ist. Allein Bouguer und Zöllner erklären diese Erscheinung in naheliegender Weise durch die starken Unebenheiten der Mondoberfläche: und wirklich zeigt auch ein Körper mit glatter aber matter Oberfläche durchaus nicht einen helleren Umriss, wie auch die folgenden Versuche bestätigen, besonders aber nicht, wenn der Umriss zugleich die Licht- und Schattengrenze bildet.

Neuerdings hat auch Hr. Seeliger<sup>3)</sup> Versuche veröffentlicht, nach denen das Lambert'sche Gesetz für beleuchtete matte Oberflächen nicht richtig ist.

Sodann hat Hr. Lommel<sup>4)</sup> theoretische Untersuchungen über die Lichtzerstreuung angestellt, wobei er nach dem Vorgange Fouriers von der Anschauung ausgeht, dass diese Zerstreuung nicht von der Oberfläche, sondern von Raumtheilen der Körpermasse hervorgebracht wird, wie auch die Färbung des zerstreuten Lichtes es fordert. Für undurchsichtige feste glühende Körper kommt er dann zu dem Cosinusetz; denn die Länge des im Innern des Körpers von einem Lichtstrahle bis zu seiner vollen Absorption zurückgelegten Weges ist nur von dem Absorptionsvermögen, nicht aber von

1) Mémoire sur la détermination géométrique des teintes dans les dessins. Journ. de l'école polyt., cah. 1. Paris an III (1797).

2) Zusatz von Brisson zu einem Vortrage von Monge, worin dieser die Beleuchtungsstärke mit  $\cos \varepsilon$  proportional setzt, enthalten in der 5. Auflage von Monge, géométrie descriptive (1827), veranstaltet von Brisson.

3) Seeliger, über das Lambert'sche Gesetz der Photometrie. Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft Jahrg. 20. p. 267. 1885.

4) Lommel, über Fluorescenz. Wied. Ann. d. Phys. u. Chemie. N. F. 10. p. 449. 1880.



liessen, und fand bei ihnen jene bestätigt. Andere Stoffe, wie liessen dagegen eine vermehrte der Spiegelung erkennen.

Ueber derartige nicht vol flächen, die man als matte und streckt sich das Giltigkeitsbereich nicht. Bei solchen Flächen hat der Einfallswinkel gegen die Ausfallswinkel. Denkt man sich unter unbegrenzte Ebene, sondern nur einer Schenkel die Normale der ist, dessen anderer Schenkel dann liegt, und welcher rechte zueinander den ausfallenden bilden die Einfallswinkel- und Ausfallswinkel zwischen  $0$  und  $180^\circ$  schwankt man heissen mag. Dieses Azimuth ohne Einfluss; es muss nach ihr Einfallswinkel dieselbe Helligkeit desselben Ausfallswinkels, welche bilden. Dies gilt nach A Bestrahlung durch rauhe, nicht a wie bei gegossenem Gyps und Brie mit dem letzteren ist nach mein Gyps unter den Richtungen je grössten bei dem Strahle, welcher liegt ( $\nu = 180^\circ$ ), und am kleinsten dem einfallenden am nächsten für  $\alpha = 75^\circ$  und  $\alpha = 75^\circ$  die Helligkeit und  $H = 0,22$  für  $\nu = 0^\circ$ , wenn Bestrahlung und senkrechtem B. heit angenommen wird. Wäh Versuchen an rauhen Oberflächen wurde nur wenig änderte, wenn wurden, fand ich bei Gyps eine Gleichheit bei dieser Vertauschung. wenn also der einfallende und c gegengesetzten Seiten der Fläch





keiten gemessen, welche bei (nahezu) übereinstimmender Bestrahlungs- und Sehrichtung ( $\nu = 0^\circ$ ,  $s = \alpha$ ) stattfindet. Indem dann, entsprechend seiner Annahme, nur die auf dieser Richtung senkrechten Flächenelemente, und zwar stets unter demselben Ein- und Ausfallswinkel von  $0^\circ$  zur Wirkung kommen, ist mit der hervorgebrachten Helligkeit  $H$  die Gesamtgrösse der so gelagerten Flächenelemente proportional, und zwar derjenigen, welche in einem so grossen Theile der Gesamtfläche enthalten sind, dass er eine gewisse unveränderliche Bildgrösse auf der Netzhaut erzeugt. Soll diese gewisse, aber willkürliche Bildgrösse durch die an der Stelle des betrachteten Flächenelementes befindliche, auf dem Sehstrahle senkrechte Flächeneinheit hervorgebracht werden, so wird sie durch den Theil  $1 : \cos s$  der betrachteten Fläche hervorgebracht, da der Sehstrahl mit ihr den Winkel  $\alpha = s$  bildet. Auf die Flächeneinheit der betrachteten Fläche geht demnach eine mit  $H : (1 : \cos s) = H \cos s$  proportionale Menge jener auf dem Sehstrahle senkrechten Elemente. Diese Grössen  $H \cos s$  dienen daher als Maass der Gesamtgrösse der auf der Flächeneinheit der betrachteten Fläche befindlichen Elemente von einer gewissen Stellung, die unter dem Winkel  $s$  gegen die Gesamtfläche geneigt ist. Bouguer trägt nun diese Grössen in der Einfallsebene auf den Linien der zurückgeworfenen Strahlen auf und erhält dadurch eine Curve, welche er die Zählcurve der Rauigkeiten (*numératrice des aspérités*) nennt. Dieselbe hat eine angenähert elliptische Gestalt, mit der Flächennormale als grossen Axe. Mittels dieser Curve löst er rein geometrisch eine Anzahl von Aufgaben, wie z. B. eine solche über die Sehrichtung der grössten Helligkeit bei einem gegebenen einfallenden Strahle, und geht dabei von der Annahme aus, dass bei gegebenem einfallendem und ausfallendem Strahle nur die auf der Halbierungslinie des Winkels dieser beiden Strahlen senkrechten Flächenelemente (spiegelnd) wirken, dass also der einfallende und der ausfallende Strahl ohne Aenderung der Helligkeit vertauscht werden dürfen. Dass bei glatten und matten Körperoberflächen diese Vertauschbarkeit in Wirklichkeit nicht besteht, wie vorhin mitgetheilt wurde, zeigt, dass für sie die Theorie der einfachen Spiegelung nicht genügt, wie auch die des Eindringens der Strahlen nicht ge-



### Die Lichtzerstreuung durch gegossenen Gyps.

Ich liess mir zwei gleiche quadratische Platten aus feinstem weissem Gyps von 25 cm Seite giessen, und beleuchtete sie im sonst dunklen Zimmer mit je einer Stearinkerze von 6 auf das Pfund, deren Flammen ich durch Biegen des Dochtes in das Innere der Flamme vergrössern konnte, und die ich auf möglichst gleichen Flammenhöhen hielt. Als Einheit der Helligkeit nahm ich die Helligkeit an, unter welcher eine solche Gypsplatte erschien bei senkrechter Beleuchtung durch ein Licht im Abstände von 1 Meter und bei senkrechtem Beschauen ( $\varepsilon = \alpha = 0^\circ$ ). Die Bestrahlungs- und Sehrichtung konnten in Wirklichkeit nicht ganz zusammenfallen; aber da die Helligkeit bei kleinen Abweichungen des Einfallswinkels  $\varepsilon$  und  $\alpha$  von  $0^\circ$  sich nur wenig ändert, konnten beide Winkel gleich und als  $0^\circ$  angenommen werden. Der Abstand des beschauenden Auges von der Platte ist ohne Einfluss auf die Helligkeit. Das Licht wurde durch einen Schirm vom Auge abgeblendet. Änderte man den Abstand des Lichtes von der einen Gypsplatte, die wir als die erste (I) bezeichnen wollen, von 1 m zu  $a$  m, so wurde, stets bei  $\varepsilon = \alpha = 0^\circ$ , die Helligkeit  $= 1 : a^2$ , und diese diene als Maass der Helligkeit für die zweite Gypsplatte (II). Diese wurde so aufgestellt, dass ihr Rand und derjenige von I sich für das

---

macht wurde. 1) Seeliger, zur Photometrie zerstreut reflectirender Substanzen (Sitz.-Ber. d. math.-phys. Cl. d. k. bayr. Ak. d. Wiss. p. 201. 1888). Hr. Seeliger hat Messungen an verschiedenen Stoffen, Lehm, Milchglas, Sandstein, Schiefer, Gyps, Porzellan ausgeführt, und zwar bei den Azimuthen von 0 und  $180^\circ$ , und fand, übereinstimmend mit den obigen Beobachtungen, dass das Lambert'sche Gesetz, namentlich bei grossen Ein- und Ausfallswinkeln, nicht gilt, dass bei grossen solchen gegenüberliegenden Winkeln meist eine merkliche Spiegelung eintritt, und dass weder die Theorie des Eindringens des Lichtes, noch die der Spiegelung für sich allein die Erscheinungen erklärt. 2) Messerschmidt, über diffuse Reflexion. (Wied. Ann. d. Phys. u. Chem. 84. p. 867. 1888.) Hr. Messerschmidt mass ebenfalls an verschiedenen Substanzen, bei Azimuthen von meist 0 und  $180^\circ$ , und kam zu Ergebnissen, welche mit denen von Hrn. Seeliger und von mir übereinstimmen. — Indem ich nun alle Azimuthe berücksichtigte, und denselben Stoff eingehend untersuchte, konnte ich die bis jetzt nicht ermittelten Helligkeitsflächen in ihren vollen und mannigfaltigen Gestaltungen erhalten.



die durch sie begrenzten rechtwinkligen Seiten wurden als Ein- und Ausfallsebene benutzt, und die dritte veränderliche Seite gab ihr Azimuth an. Indem die Azimuthwinkel von  $90$  zu  $30^\circ$ , die Ein- und Ausfallswinkel von  $15$  zu  $15^\circ$  getheilt waren und ausserdem  $82\frac{1}{2}$  und  $86\frac{1}{4}^\circ$  anzeigten, und indem eine im Scheitel befestigte Schnur in jenen Ebenen nach dem Auge und nach dem Lichte geführt wurde, gab sie den Aus- und den Einfallswinkel, der Grundhalbkreis aber das Azimuth an. Der bewegliche rechte Winkel wurde zeitweilig durch angeklebte Papierstreifen auf ein bestimmtes Azimuth fest eingestellt, für welches dann nacheinander alle Messungen vorgenommen wurden.

Auf diese Weise wurde innerhalb der angegebenen Werthe von  $\nu$ ,  $\alpha$ ,  $\varepsilon$  die Helligkeiten gemessen, dabei für dieselben Winkel meist 2, manchmal mehr, selten nur eine Einstellung vorgenommen. Es ergab sich dabei z. B. bei  $\nu = 90^\circ$ ,  $\varepsilon = 90^\circ$ ,  $\alpha = 75^\circ$  für die Platte II der Abstand des Lichtes von ihr  $b = 1,225$  m; dann wurde die Platte I (bei senkrechtem Bestrahlen und Beschaun) so lange verschoben, bis ihr Bild mit dem von II verschmolz, worauf die Messung den Abstand ihres Lichtes von ihr  $a = 1,465$  m ergab. Die Helligkeit von II wäre dann bei dem Lichtabstande  $= 1$  m selbst  $H = (1,225 : 1,465)^2 = 0,701$  gewesen. Eine zweite Einstellung lieferte  $a = 1,225$  m,  $b = 1,405$  m, daher  $H = 0,762$ .

Um ein Maass für die erlangte Genauigkeit zu erhalten, stellte ich die zwei Gypsplatten nebeneinander, und setzte sie an der Grenzkante der senkrechten Beleuchtung durch dasselbe Licht aus. Ich liess nun die eine verschieben, bis die Bilder beider verschmolzen, mass die Abstände der beweglichen und fand dieselben schwankend zwischen den äussersten Grenzen  $0,746$  und  $0,774$  m, ihre Helligkeit also zwischen  $(1 : 0,746)^2$  und  $(1 : 0,774)^2$ , d. h. zwischen  $1,797$  und  $1,666$ , also um  $0,131$ . Die verhältnissmässig grösste Schwankung war daher  $0,131 : 1,738 = 0,075$ , wobei  $1,738$  die mittlere Helligkeit war; die grösste Abweichung vom Mittel war aber  $0,072$  und die verhältnissmässige  $= 0,072 : 1,738 = 0,0406$ . Der mittlere verhältnissmässige Fehler ergab sich  $= 0,0196$ . Grösser war die Unsicherheit bei Anwendung von zwei Lichtern, deren Verschiedenheit dann mitwirkte; die Abweichung zweier Messungen voneinander



richtung angibt. Sie unterscheidet sich von der Helligkeitsfläche dadurch, dass sie die beleuchtete Platte in  $F$  berührt, während die Helligkeitsfläche sie nach einer ausgedehnten Curve schneidet, weil für streifende Lichtstrahlen die Helligkeit Null wird, für streifende Sehstrahlen aber endlich bleibt. Nach dem Lambert'schen Gesetze wäre auf jedem einfallenden Strahle die Helligkeit  $\cos \epsilon$  aufzutragen, die Fläche würde also eine berührende Kugel vom Durchmesser Eins sein; sie wäre unabhängig von  $\alpha$ , oder für jede Lage des ausfallenden Strahles dieselbe. Wollte man endlich noch bei festem ausfallendem Strahle auf jedem einfallenden Strahle die von dem unveränderlichen Flächenelemente ausgestrahlte Lichtmenge auftragen, so müsste man die vorher gefundenen Helligkeiten noch mit  $\cos \alpha$  multipliciren. Nach dem Lambert'schen Gesetze erhielte man dann eine berührende Kugel vom Durchmesser  $\cos \alpha$ . Wir werden in der Folge nur die Helligkeiten, nicht aber die von der Flächeneinheit ausgestrahlten Lichtmengen ins Auge fassen, sodass nur die Helligkeits- und die Beleuchtungsflächen in Betracht kommen.

Diese Flächen sind nun stetige, und mittels ihrer *Stetigkeit* kann man die mit den Beobachtungsfehlern behafteten Messungsergebnisse verbessern. Bei den Helligkeitsflächen ist  $\epsilon$  unveränderlich; und legt man eine schneidende Ebene durch die Flächennormale, so erhält man eine Schnittkurve, für deren beide Hälften die Azimuthe  $\nu$  und  $180^\circ - \nu$  mit übereinstimmendem, unveränderlichem  $\nu$  gelten, in welcher sich  $H$  nur mit  $\alpha$  ändert. Eine solche Curve soll Meridiancurve heissen. Legt man dagegen einen schneidenden Umdrehungskegel mit  $F$  als Spitze und der Flächennormale als Umdrehungsaxe, also mit unveränderlichem  $\alpha$ , so ändert sich  $H$  mit  $\nu$ . Diese Curve heisse die Kegelcurve. Entsprechend liefert die Beleuchtungsfläche Meridian- und Kegelcurven.

Da  $H$  von den 3 unabhängig Veränderlichen  $\epsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\nu$  abhängt, so erhält man jene Curven, indem man zwei dieser letzteren Grössen unveränderlich lässt; dann ist  $H$  nur noch von der letzten der drei abhängig. Da  $\epsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\nu$  Winkel,  $H$  ein Strahl, so ist jede der Curven durch Polarkoordinaten gegeben. Trägt man auf den Strahlen die durch Messung erhaltenen  $H$  auf, so wird die durch deren zweite Endpunkte gelegte Curve





erreicht wurde —, für  $\nu$  die Winkel 0, 30, 60, 90, 120, 150, 180°. Ich verzeichnete 41 solcher Curven mit ihren Polar-coordinaten, also wirkliche Meridiancurven, und die Kegel-

curven in der Abwicklung der Kegel.

dabei d. des Blickes

so gross wa

und ging daher zu rechtwinkligen Coordinaten über. Ein unver-

änderliches  $H$  liefert bei Polar-coordinaten einen Kreis, bei

rechtwinkligen eine gerade Linie. Die Abweichungen von

einer Geraden können feiner empfunden werden, als die von einem

Kreise, und auch bei anderen Curven die Stetigkeit mittels

rechtwinkliger Coordinaten feiner, als mittels Polarcoordi-

naten.

Um eine Vorstellung der letzteren Curven zu geben, habe ich neben einige abgebildet.

Fig. 2 gibt die beiden wichtigsten, die für  $\alpha = 0^\circ$ , also für den

normal einfallenden Strahl, für welchen die Helligkeitsfläche

eine Umdrehungsfläche, daher  $\nu$  ohne Einfluss ist, und die

für  $\alpha = 0^\circ$ , also für den normal ausfallenden Strahl, für welchen

die Beleuchtungsfläche ebenfalls eine Umdrehungsfläche und

$\nu$  ohne Einfluss ist. Fig. 3 gibt die Reihe der Curven  $H$

für  $\alpha = 75^\circ$  und für  $\nu$  der Reihe nach  $= 0$  und  $180, 30$

und  $150, 60$  und  $120, 90^\circ$ . Die



$\varepsilon = 15^\circ \quad \cos \varepsilon = 0,97$ 

$\alpha$	$\nu=0^\circ$	30	60	90	120	150	180
$0^\circ$	0,90	90	90	90	90	90	90
15	91	91	91	91	91	91	91
30	93	93	93	93	93	93	93
45	94	93	92	92	92	93	94
60	91	90	88	89	90	91	92
75	68	74	75	76	76	77	88
$82\frac{1}{2}$	62	63	63	63	63	65	68
$86\frac{1}{4}$	59	60	61	61	61	62	64
90	56	57	58	59	59	60	60

 $\varepsilon = 30^\circ \quad \cos \varepsilon = 0,87$ 

$\alpha$	$\nu=0^\circ$	30	60	90	120	150	180
$0^\circ$	0,76	76	76	76	76	76	76
15	77	77	77	77	77	77	77
30	80	80	79	79	79	79	79
45	82	82	81	80	81	81	81
60	78	78	78	78	79	79	81
75	60	66	71	72	72	72	77
$82\frac{1}{2}$	53	61	64	64	65	65	68
$86\frac{1}{4}$	50	57	61	62	62	62	64
90	48	53	58	58	58	58	60

 $\varepsilon = 45^\circ \quad \cos \varepsilon = 0,71$ 

$\alpha$	$\nu=0^\circ$	30	60	90	120	150	180
$0^\circ$	0,62	62	62	62	62	62	62
15	62	62	62	62	62	61	60
30	63	63	63	63	62	62	62
45	63	63	63	63	63	66	87
60	60	63	64	65	66	74	94
75	50	58	62	63	64	67	72
$82\frac{1}{2}$	44	53	59	60	61	65	69
$86\frac{1}{4}$	42	49	57	58	59	64	68
90	40	46	55	56	58	62	67

 $\varepsilon = 54^\circ 44' \quad \cos \varepsilon = 0,58$ 

$\alpha$	$\nu=0^\circ$	30	60	90	120	150	180
$0^\circ$	0,52	52	52	52	52	52	52
15	51	51	51	51	50	50	50
30	51	51	51	50	50	50	49
45	50	51	52	52	52	52	51
60	48	51	54	54	55	55	54
75	42	48	53	54	56	56	54
$82\frac{1}{2}$	37	45	52	53	56	56	54
$86\frac{1}{4}$	34	42	51	52	55	55	54
90	32	38	50	51	55	55	54

 $\varepsilon = 60^\circ \quad \cos \varepsilon = 0,50$ 

$\alpha$	$\nu=0^\circ$	30	60	90	120	150	180
$0^\circ$	0,47	47	47	47	47	47	47
15	46	46	46	46	45	44	43
30	45	45	45	44	43	43	42
45	43	44	46	46	46	48	52
60	41	45	48	48	49	55	98
75	37	43	48	49	52	58	70
$82\frac{1}{2}$	33	40	48	49	53	59	65
$86\frac{1}{4}$	32	37	47	49	53	60	64
90	28	35	47	48	53	60	63

 $\varepsilon = 75^\circ \quad \cos \varepsilon = 0,26$ 

$\alpha$	$\nu=0^\circ$	30	60	90	120	150	180
$0^\circ$	0,24	24	24	24	24	24	24
15	23	23	23	23	23	23	23
30	22	22	22	22	22	22	21
45	21	22	22	22	23	24	24
60	21	24	25	25	26	30	30
75	22	24	28	28	31	36	36
$82\frac{1}{2}$	21	24	28	29	33	40	40
$86\frac{1}{4}$	19	23	30	31	35	43	43
90	16	22	30	32	36	45	45

 $\varepsilon = 82\frac{1}{2}^\circ \quad \cos \varepsilon = 0,13$ 

$\alpha$	$\nu=0^\circ$	30	60	90	120	150	180
$0^\circ$	0,13	13	13	13	13	13	13
15	13	13	13	13	13	13	13
30	12	12	12	12	11	11	11
45	11	11	11	11	12	12	12
60	10	12	13	13	14	16	22
75	12	12	15	16	16	25	1,90
$82\frac{1}{2}$	11	12	16	17	18	29	5,00
$86\frac{1}{4}$	10	12	17	18	20	32	5,21
90	08	11	17	18	22	35	2,60

 $\varepsilon = 86\frac{1}{4}^\circ \quad \cos \varepsilon = 0,07$ 

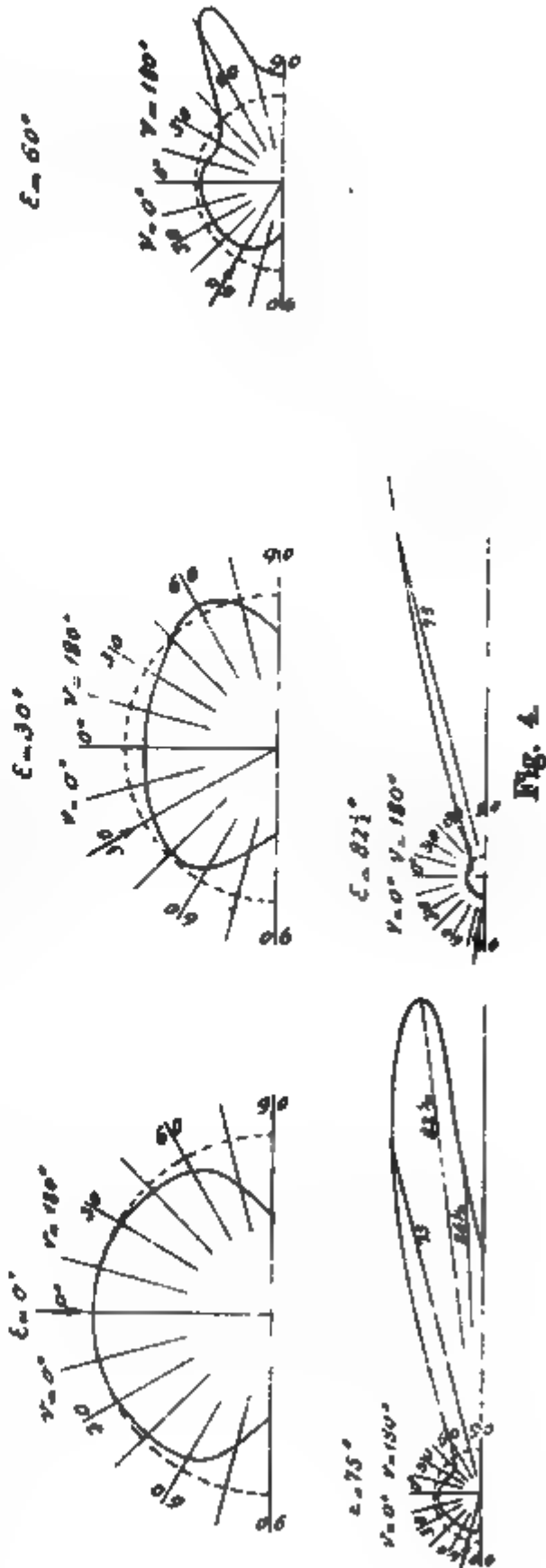
$\alpha$	$\nu=0^\circ$	30	60	90	120	150	180
$0^\circ$	0,07	07	07	07	07	07	07
15	07	07	07	07	07	07	07
30	06	06	06	06	06	06	06
45	05	05	05	05	05	05	05
60	05	06	07	07	07	08	08
75	06	07	08	09	10	12	12
$82\frac{1}{2}$	06	07	09	09	10	15	15
$86\frac{1}{4}$	05	06	09	09	11	16	16
90	04	06	09	09	11	18	18

In Fig. 4 sind von den Helligkeitsflächen die Meridiane der Einfallsebenen, also für  $\nu = 0$  und  $= 180^\circ$  angegeben, und zwar für  $\varepsilon = 0, 30, 60, 75, 82\frac{1}{2}, 86\frac{1}{4}$ ; die gestrichelten Halb-

kreise sind mit den Halbmessern  $\cos s$  verzeichnet, gehören also den Helligkeitsflächen an, welche dem Lambert'schen Gesetze entsprechen und Halbkugeln sind.

Die Tabellen für die Beleuchtungsflächen, also mit unveränderlichem  $\alpha$ , bildet man aus den vorigen. In Fig. 5 sind die Meridiane der Ausfallsebenen für diese Flächen für  $\alpha = 0$  und  $= 60^\circ$  verzeichnet; die gestrichelten Kreise gehören den Beleuchtungsflächen nach Lambert an, welche gleiche von  $\alpha$  unabhängige Vollkugeln vom Halbmesser 1 bilden.

Die beigelegte Tafel gibt die photographischen Nachbildungen der Modelle von vier Helligkeitsflächen für  $s = 0, 30, 60, 82\frac{1}{2}^\circ$ , welche mein Assistent, Hr. C. Tesch, ausgeführt hat. Es wurden die Meridiane in den angegebenen Intervallen von  $30^\circ$  ausgeschnitten und durch Kegel verbunden, welche bei den drei ersten Modellen mit  $\alpha = 30$  und  $60^\circ$ , bei dem letzten mit  $\alpha = 82\frac{1}{2}^\circ$  gebildet sind. Auf Meridianen und Kegeln sind auch die kreisförmigen Schnitte mit den Helligkeitskugeln Lambert's (von den Halbmessern  $\cos s$ ) aufgezeichnet. Zur leichten Unterscheidung sind die Meridian- und Kegelcurven der wirklichen Helligkeitsflächen nach innen



weiss gelassen, die der Lambert'schen nach innen schwarz angelegt. Der einfallende Lichtstrahl ist durch einen Draht mit Pfeilspitze bezeichnet.

Aus diesen Ergebnissen sind Folgerungen über den Vorgang der Lichtzerstreuung durch gegossenen Gyps und durch matte, aber nicht raue Oberflächen überhaupt in der Einleitung gezogen worden. Ueber die erfahrungsmässige Stärke der Lichtzerstreuung durch gegossenen Gyps kann man aus den Tabellen, oder auch aus den Figuren und Modellen, folgende Schlüsse ziehen.

1. Bei unveränderlichem Einfallswinkel  $\varepsilon$  und bei wechselnden Ausfallswinkeln  $\alpha$  von  $0$  bis  $60^\circ$  ist die Helligkeit eine

ziemlich gleichförmige und zwar meist etwas kleiner, als nach dem Lambert'schen Gesetze.

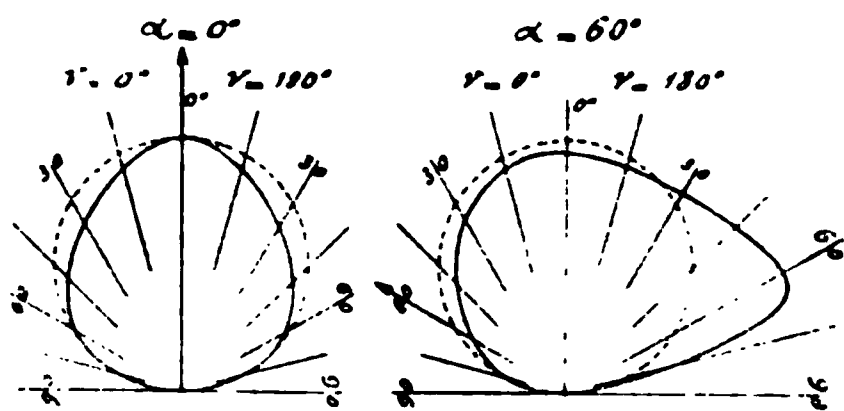


Fig. 5.

2. Nimmt dann  $\alpha$  weiter von  $60$  bis  $90^\circ$  zu, so nimmt die Helligkeit im allgemeinen ab,

und erreicht in dieser Grenze von  $\alpha = 90^\circ$  oder bei streifendem Sehen ungefähr  $0,6$  derjenigen bei  $\alpha = 0^\circ$ .

3. Auf der dem einfallenden Strahle gegenüberliegenden Seite, also auf der Seite der Spiegelung ist die Helligkeit grösser als an den entsprechenden Stellen (von gleichem  $\alpha$ ) auf derselben Seite.

4. Die Spiegelung wird um so deutlicher und stärker, je grösser der Einfallswinkel  $\varepsilon$  ist. Bei  $\varepsilon = 45^\circ$  und noch mehr bei  $60^\circ$  ist sie durch grössere Helligkeit, noch nicht aber durch ein deutliches Spiegelbild oder durch Glanz bemerkbar. Die grösste Helligkeit  $H$  beträgt bei  $\varepsilon = 60^\circ$  schon  $1,03$ , während die mittlere etwas kleiner als  $\cos \varepsilon$  oder  $0,5$  ist, und dies findet statt bei  $\nu = 180^\circ$  und  $\alpha = 67^\circ$ , also bei einem Ausfallswinkel, der grösser als der Einfallswinkel ( $60^\circ$ ) ist. Auch bei einem Azimuthe, das kleiner als  $180^\circ$ , ist noch eine deutliche Lichtverstärkung zu bemerken, und zwar bis zu  $\nu = 162^\circ$ . Bei  $\varepsilon = 75^\circ$  ist eine deutliche Spiegelung mit Glanz sichtbar, und zwar von  $\alpha = 73$  bis  $90^\circ$ , am stärksten mit  $H = 2,2$  bei



Verfasser zu Gebote standen, ausgeführt die Helligkeitsflächen ermittelt würden. solche Untersuchungen besonders über Leinwand, Tuch, Seide, Sammt, von weitergehend die Aufstellung von Farbenscalen, die darauf gegründet wären.

---





dagegen auf Grund des Weber'schen Gesetzes eine Formel zwischen den Stärken der Empfindung und des zugehörigen Reizes mit unbestimmten Constanten auf.<sup>1)</sup> Dadurch gewinnt er aber nicht den Begriff einer bestimmten Empfindungseinheit, derart dass ihn der Mangel dieser Einheit von Widersprechern zum Vorwurf gemacht wird, so von Delbeuf, Kries, F. A. Müller, Zeller.<sup>2)</sup> Der Grad der Empfindlichkeit ist dadurch ausgeschieden; dies muss ich aber für einen Mangel halten, da dieser Grad wesentlich zum Messen der Empfindungsstärke gehört, und seine Ausscheidung daher als eine Verschleierung anzusehen ist.

Noch kurz vor seinem im I hat Fechner in einer Erwiderung physischen Ansichten in einer deutlicher erscheint, als seine fr gibt er auch den Begriff einer weil er von der Empfindlichkeit sein muss. In Wahrheit ist als bestimmte Empfindlichkeit zugrunde absolute Empfindungseinheit, die ausreicht, später benutzen, um die Empfindungsstärke und für die Empfindlichkeit zu gewinnen.

Gehen wir nun zu unseren Untersuchungen über. Mit dem Wachsen der Helligkeit einer Fläche, das ist auch mit dem Wachsen des Reizes, den sie auf unser Auge ausübt, wird die Empfindung der Helligkeit stärker oder die Empfindungsgrösse oder Empfindungsstärke wächst. Aber die Helligkeitsempfindung nimmt nicht gleichförmig zu, wenn die Helligkeit gleichförmig zunimmt, oder allgemein, die Empfindungsstärke wächst nicht in dem gleichen Maasse wie der Reiz. Denn wenn eine Fläche mit einer und nachher mit zwei Kerzen beleuchtet wird, so wird die Helligkeit um diejenige vermehrt, welche eine Kerze hervorbringt, und zugleich wird die Helligkeits-

1) l. c. p. 12.

2) Vgl. Fechner, Revision der Hauptpunkte der Psychophysik. p. 300, 321, 324, 332. 1882.

3) Fechner, über die psychischen Maassprincipien und das Weber'sche Gesetz (Philosophische Studien, herausgegeben von Wundt. 4. p. 161 ff., insbes. 179—212). 1888.



hervorgebrachten Empfindungsstärke wird natürlich mit der Person, und auch bei derselben Person mit ihren verschiedenen Zuständen, z. B. mit dem Grade der Aufmerksamkeit und der Ermüdung wechseln.

Dabei steht jedenfalls die Zunahme der Empfindungsstärke mit derjenigen des Reizes in einem gesetzmässigen Zusammenhange; es ist aber bei jener Bestimmung der Empfindungsstärke gar nicht nothwendig, diesen Zusammenhang zu kennen; man kann stets durch Versuche die Grösse der Empfindung in der angegebenen Weise abzählend bestimmen. Jener Zusammenhang ist aber in Wirklichkeit ein sehr einfacher, und gegeben durch das *Weber'sche Gesetz*. Nach ihm ist innerhalb gewisser Grenzen der Unterschied zweier Empfindungen eben bemerkbar, wenn der Reiz sich um einen bestimmt verhältnissmässigen Theil seiner Grösse ändert.

Nimmt der Reiz  $r$  um  $\Delta r$  bis zu  $r_1$  zu, so hat  $\Delta r$  sowohl zu dem kleineren  $r$ , wie zu dem grösseren  $r_1 = r + \Delta r$  (und auch zu dem mittleren  $r + \frac{1}{2} \Delta r$ ) ein unveränderliches Verhältniss. Ist  $r : \Delta r = \alpha$ , so ist  $r_1 : \Delta r = (r + \Delta r) : \Delta r = \alpha + 1$ ; oder es ist

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{\Delta r}{r_1} = \frac{1}{\alpha + 1}$$

So ist z. B. nach der zweiten Reihe der folgenden Versuche der Unterschied der Helligkeiten zweier Gypsplatten eben bemerkbar, wenn er etwa  $\frac{1}{12}$  der Helligkeit der weniger hellen, also  $\frac{1}{13}$  derjenigen der helleren beträgt, sodass hier  $\alpha = 12$  wäre.

Der Unterschied dieser beiden Verhältnisszahlen liegt aber immer innerhalb der Fehlergrenze. Wir wollen mit Fechner<sup>1)</sup> das Verhältniss  $(1 : \alpha)$  die *Verhältnisschwelle* (Verhältnissconstante) nennen.  $\alpha$  ist ihr reciproker Werth. Der Unterschied der zu den Reizen  $r$  und  $r_1$  gehörigen Empfindungen  $e$  und  $e_1$  ist eben bemerkbar, also die angenommene Empfindungseinheit.<sup>2)</sup>

1) Fechner, Elem. d. Psychophysik. 1. p. 244.

2) Die Hrn. König u. Brodhun fanden, dass das Weber'sche Gesetz für sehr grosse Helligkeiten nicht mehr gilt, indem bei diesen die unveränderliche Verhältnisschwelle zunimmt. (Experimentelle Untersuchungen über die psychophysische Fundamentalformel in Bezug auf den Gesichtssinn. Sitzungsber. der Akad. der Wiss. in Berlin. 1888. 2.



9 mm Flammenhöhe, welches die Helligkeit von 0,07 oder (1:14,8) Stearinlicht hatte. Denn im Abstände von 4,85 m von der Gypsplatte brachte es auf dieser dieselbe Helligkeit hervor, wie das Stearinlicht im Abstand von 5,11 m auf der benachbarten Platte; und es ist  $(1,85:5,11)^2 = 0,07 = 1:14,8$ . Ich stellte nun am dunklen Abend in einer Reihe von Zimmern im entferntesten die beiden Gypsplatten nebeneinander auf und liess durch die Thüren hindurch den Schein der Benzinflamme auf sie fallen; dem ohngeachtet konnte ich sie nicht bemerken. Ich näherte nun die Flamme bis die Platten sichtbar wurden. Die Entfernung der Flamme von ihnen war dann 18,82 m, daher die Helligkeit oder der Reiz  $r = 0,07:18,82^2 = 0,0001972$ , und die Empfindung  $e = 1$ . Als Einheit der Helligkeit war dabei, wie in der vorhergehenden Abhandlung, die Helligkeit der Gypsplatte bei senkrechter Beleuchtung durch eine Stearinkerze von 1 m Abstand angenommen. Ich liess dann, während die Flamme stehen blieb, die eine Platte näher rücken, bis sie heller erschien, als die andere. Sie hatte dann den Abstand von der Flamme = 18,34 m, ihre Helligkeit war daher  $r = 0,07:18,34^2 = 0,0002075$  und die Empfindung war 2. Der Unterschied der Reize  $\Delta r$  ist daher  $0,0002075 - 0,0001972 = 0,0000103$ , also  $\Delta r : r = (1 : \alpha) = 0,0000103 : 0,0001972 = 0,052 = 1:19,2$ ; und  $1 : (\alpha + 1) = 0,0000103 : 0,0002075 = 0,0496 = 1:20,2$ , also jedesmal  $\alpha = 19,2$ , und die Rechnung richtig. Nun liess ich die erste Platte näher rücken, bis sie eben merkbar heller als die zweite erschien, und erhielt den Abstand 16,25 m etc. Ich erhielt so die Abstände 18,82; 18,34; 16,25; 15,42; 14,24; 13,55 . . . und zuletzt 1,02; 0,97; 0,89; 0,86 m, wobei die letzte Aufstellung die 47., also  $e = 47$  war, sodass die Empfindungsstärke 47 Einheiten besass. Dabei ergaben sich der Reihe nach 46 Werthe von  $1 : \alpha$  zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Aufstellungen oder Reizen, nämlich 0,052; 0,252; . . . oder ausgedrückt in Tausendtel: 52, 252, 111, 117, 121, 113, 152, 172, 206, 218, 165, 136, 107, 89, 78, 93, 70, 65, 156, 77, 161, 58, 91, 127, 92, 103, 194, 92, 236, 141, 216, 176, 297, 114, 167, 137, 169, 186, 226, 213, 138, 128, 226, 104, 190, 74. Man sieht, dass die Schwankungen sehr bedeutend waren, was zum Theil unvermeidlich sein wird, und in der Unsicherheit der Auffassung



und von den beiden so gewonnenen Gleichungen die eine von der anderen abzählt. Es fällt dadurch  $s$  aus, und man erhält

$$\log \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{\log 0,0948 - \log 0,0001972}{47 - 1} = 0,058307,$$

$$\frac{1}{\alpha} = 0,1437, \alpha = 6,96,$$

oder nahezu  $= 7$ . Man erkennt also den Unterschied zweier Helligkeiten gerade deutlich, wenn er  $\frac{1}{7}$  der geringeren, oder  $\frac{1}{8}$  der grösseren dieser Helligkeiten ist.

Hieraus erhält man aber

$$s = \frac{0,0001972}{1 + 0,1437} = 0,0001728,$$

sodass die obigen Formeln werden

$$r = 0,0001728 \cdot 1,1437^e, e = \frac{\log r - \log 0,0001728}{0,058312}.$$

Um die durch jede dieser Gleichungen dargestellte logarithmische Linie  $k$  mittels ihrer Coordinaten  $r$  und  $e$  zu verzeichnen, trage man (Fig. 1) auf der Axe  $r$  für  $e = 0$  die  $r = s = 0,0001728$  als  $OS$  auf. Für  $e = 1$  wächst  $r$  zu  $s \cdot 1,1437 = OC$ , oder um  $s \cdot 0,1437 = SC$ . Zieht man nun aus irgend einem Punkte  $A$  der Axe  $r$  einen Kreisbogen mit dem Halbmesser  $AB = OA \cdot 0,1437$  und an ihn die Tangente  $OB$  aus  $O$ , so ist auch der Abstand  $SC'$  des Punktes  $S$  von  $OB = OS \cdot 0,1437$  oder gleich jenem Zuwachse  $SC$  des  $r$ . Zu  $r = OC$  gehört dann  $e = 1$ . Wächst nun  $r$  weiter um  $CD = CD'$ , so gehört zu  $D$ ,  $e = 2$  etc. Weil aber beim Aneinanderreihen der Zuwachse der  $r$  die Fehler sich addiren, so berechnet man zweckmässig einige  $r$ , und findet so z. B. für  $e = 10$ ,  $r = 0,0006617$ , wonach man die construirten Punkte verbessert. — Indem man die *logarithmische Linie* in ihrem ganzen Verlaufe gelten lässt, erhält man auch Bruchtheile von Helligkeiten, welche anzeigen, wie weit man bei einem sprungweisen Fortschreiten der Helligkeitsempfindung um Einheiten noch von einem folgenden merkbaren Zuwachse entfernt sein würde.

Die Grössen  $s$  und  $\alpha$ , welche bei derselben Person auf einige Zeit so gut wie unveränderlich sind, wechseln, wie schon angedeutet, mit der Person, und bei derselben Person mit





bei  $H = 0,000065$ , und  $1 : \alpha$  der  $E$  oder in Tausendtel 27, 100, 77, 107, 58, 98, welche Werthe wese sind. Die letzte Helligkeit war findet dann den mittleren Werth  $s = 0,00006012$ ;  $r = 0,00006012$

Die Curve ist durch die Lini

Die Vergleichung der beiden die Empfindungsstärken in hohen lichen Beschaffenheit des Sinnesw daraus hervor, dass die Maass durchaus nicht allein von der sondern selbstverständlich auch augenblicklichen Beschaffenheit. suchungen in den Stand gesetzt oder *Empfindlichkeiten*<sup>1)</sup> verschied Person zu verschiedenen Zeiten

Dabei macht es aber eine Unterschiedsschwellen oder die vergleicht. Im ersteren Falle  $E_u$  und  $E_u'$  wie die  $Z$  eine Person  $\frac{1}{20}$ , eine andere ein Reizes empfindet, so verhalten sich  $20 : 10$ . Es verhalten sich also d umgekehrt wie die Unterschiedss reciproke Werthe, oder es ist

$$E_u : E_u' = \frac{1}{\alpha'} :$$

Ebenso verhalten sich Offenheiten umgekehrt wie die Reizsch

$$E_s : E_s' =$$

Bei unseren Versuchen war wöhnte Auge  $\alpha = 6,96$ ,  $s = 0,000$  heit gewöhnte  $\alpha' = 12,3$ ,  $s' = 0,00$

$$E_u : E_u' = 6,96 : 12,3$$

$$E_s : E_s' = 0,00006012 : 0,$$

1) Vgl. Fechner, Elem. d. Psych



war. Dadurch ergeben sich in der die Werthe der Reisschwellen 0,0001244 und  $s' = 0,72 \cdot 0,00008$  die Reizverhältnisse  $\alpha$  nicht verhältnissmässig zum Messen der absoluten Empfindlichkeit zwischenliegenden rundzahligen  $V$  man für den absoluten Werth der die Formel

$$s = \frac{\log r - \log 0,000}{\log (1 + 0,1)}$$

Für  $r = 1$  würde daraus  $s =$  Rückstrahlungsvermögen 1, durch stand von 1 m senkrecht beleuchtet Beschaffen die absolute Empfindlichkeit bringen.

Durch dieses absolute Maass hält man auch ein *absolutes Maass* man die Empfindlichkeiten, welche stärke herbeiführen, gleich Eins waren für das ans Licht gewöhnte absolutem Helligkeitsmaasse  $s =$  Dunkelheit gewöhnte  $\alpha' = 12,3$ , absoluten Maasse nahmen wir an  $\epsilon$  sind bei unseren Versuchen die *Schwellenempfindlichkeiten*

$$E_u = \frac{0,96}{10} = 0,096, E_s$$

$$E_s = \frac{0,0001}{0,0001244} = 0,803,$$



der Krystallphysik gebräuchliche Annahme macht, dass die Symmetrie des physikalischen Verhaltens durch die Symmetrie der Krystallform bestimmt wird. Ihre Verfolgung reducirt, falls man ein durch Symmetrieeigenschaften ausgezeichnetes Coordinatensystem zu Grunde legt, die Anzahl der voneinander unabhängigen Reibungsconstanten erheblich, sodass die hinsichtlich der Elasticitätserscheinungen gleichwerthigen Gruppen auch hier gleichwerthig bleiben, aber die Anzahl der ihnen entsprechenden Reibungsconstanten stets grösser ist, als die der Elasticitätsconstanten.

Man erhält folgende Resultate:

	Reibungs- constanten	Elasticitäts- constanten
Triklines System . . . . .	36	21
Monoklines System . . . . .	20	13
Rhombisches System . . . . .	12	9
Quadratisches System: I. Abtheilung. . . . .	7	6
II. Abtheilung. . . . .	9	7
Hexagonales System: I. Abtheilung. . . . .	6	5
II. Abtheilung. . . . .	8	6
III. Abtheilung. . . . .	11	7
Reguläres System. . . . .	3	3
Isotrope Körper . . . . .	2	2

Das Verhältniss ändert sich, wenn man die Definition der inneren Reibung etwas enger fasst, als oben geschehen ist, und nur diejenigen Antheile der  $A_x, \dots$  als ihr entsprechende Druckcomponenten gelten lässt, welche bei allen Bewegungserscheinungen eine Energie absorbirende Wirkung üben.

Diese Antheile erhält man, indem man z. B.  $A_x$  in  $A'_x$  und  $A''_x$  so zerlegt, dass

$$A_x = A'_x + A''_x$$

und

$$\begin{aligned} - A'_x &= a_{11} x'_x + \frac{a_{12} + a_{21}}{2} y'_y + \frac{a_{13} + a_{31}}{2} z'_z + \dots + \frac{a_{16} + a_{61}}{2} x'_y, \\ - A''_x &= \frac{a_{12} - a_{21}}{2} y'_y + \frac{a_{13} - a_{31}}{2} z'_z + \dots + \frac{a_{16} - a_{61}}{2} x'_y, \end{aligned}$$

ist. Dann gibt das System der  $A''_x, \dots$  zur Arbeit der Druckkräfte einen verschwindenden Antheil, und demgemäss keine Absorption von Energie; das System der  $A_x, \dots$  stellt von diesem Standpunkte aus die Druckcomponenten der inneren









$$(8) \quad \mathfrak{M}_x \psi_x'' = -A, \quad \mathfrak{M}_y \psi_y'' = -M, \quad \mathfrak{M}_z \psi_z'' = -N,$$

in denen die  $\mathfrak{M}$  die Trägheitsmomente der betreffenden Massen, die  $\psi$  ihre Drehungswinkel gegen die Ruhelagen bezeichnen; letztere stehen mit den Grössen  $g_k$  und  $k$  in der Beziehung, dass  $g_1 = \psi_y / L$ ,  $g_2 = \psi_x / L$ ,  $k = \psi_z / L$  ist.  $A$ ,  $M$ ,  $N$  lassen sich aus den Gleichungen (7) und (8) auf zweierlei Weise eliminiren. Einmal, indem man die Gleichungen (7) in der früher benutzten Annäherung nach  $A$ ,  $M$ ,  $N$  auflöst und die erhaltenen Werthe einsetzt. Dann ergibt sich resp.

$$(9) \quad \begin{cases} \mathfrak{M}_x \psi_x'' = -\frac{Q x_z^2}{L s_{xx}} \left( \psi_x + \frac{n_{xx}}{s_{xx}} \psi_x' \right), \\ \mathfrak{M}_y \psi_y'' = -\frac{Q x_z^2}{L s_{yy}} \left( \psi_y + \frac{n_{yy}}{s_{yy}} \psi_y' \right), \\ \mathfrak{M}_z \psi_z'' = -\frac{4 Q x_1^2 x_2^2}{L (x_1^2 s_{44} + x_2^2 s_{55})} \left( \psi_z + \frac{x_2^2 n_{44} + x_1^2 n_{55}}{x_1^2 s_{44} + x_2^2 s_{55}} \psi_z' \right). \end{cases}$$

Diese Formeln entsprechen gewissermaassen den Ausgangsgleichungen (1). Ferner kann man  $A$ ,  $M$ ,  $N$  aus (8) entnehmen und in (7) einsetzen. Dann folgt:

$$(10) \quad \begin{cases} M_x L (s_{xx} \psi_x'' - n_{xx} \psi_x''') + Q x_z^2 \psi_x = 0, \\ M_y L (s_{yy} \psi_y'' - n_{yy} \psi_y''') + Q x_z^2 \psi_y = 0, \\ M_z L \left( \left( \frac{s_{44}}{x_2^2} + \frac{s_{55}}{x_1^2} \right) \psi_z'' - \left( \frac{n_{44}}{x_2^2} + \frac{n_{55}}{x_1^2} \right) \psi_z''' \right) + 4 Q \psi_z = 0. \end{cases}$$

ein Formelsystem, das den Ausgangsgleichungen (2) entspricht.

Wenn die  $n_{hk}$  klein gegen die  $s_{hk}$  sind, geben beide Systeme dieselben Resultate. Sie enthalten die Theorie der angestellten Beobachtungen, soweit dieselben von der inneren Reibung abhängen.

Die Gleichungen (9), von denen wir weiterhin ausgehen wollen, fallen unter die Form

$$(11) \quad \psi'' + \beta (\psi + \psi' \alpha) = 0,$$

worin  $\alpha$  die *Dämpfungsconstante* für die betrachtete Schwingung heissen mag; sie ist für die Biegungsschwingungen unter den gemachten Voraussetzungen stets vom Querschnitt des Stabes unabhängig und nur eine Function der Orientirung seiner Axe gegen die Krystallaxen; bei Drillungsschwingungen gilt dies nur, wenn die Orientirung derartig ist, dass  $s_{44} = s_{55}$ ,  $n_{44} = n_{55}$



Hieraus folgen die Werthe der Biegungs- und Drillungsschwingungen

$$(16) \quad \alpha_s = \frac{\pi_m}{s_m} = \frac{\pi}{s}, \quad \alpha_r =$$

Sind dieselben durch die Beobachtung bestimmt, so erhält man aus ihnen die Moduln  $s$ ,  $s_1$  bekannt sind, zunächst das entsprechende Reibungsmoduln, und

$$(17) \quad \begin{cases} \pi = 2 \alpha_s (s^2 + 2 s_1^2) + \alpha_r \\ \pi = \alpha_s s_1^2 \end{cases}$$

ist, auch leicht die Werthe der Reibungsschwingungen  $\alpha_r$  woraus nach (15)  $\alpha$  folgt.

Wie die Elasticitätsmoduln gefunden wurden, soll an einer Stelle erörtert werden, da die erhaltenen Resultate Interesse besitzen.

## II. Die Beobachtung

Der Messung zu unterwerfen sollten die Dauer und das logarithmische Decrement der Biegungs- und Drillungsschwingungen prismatischer Stäbe. Sollten die Schwingungen durch die grossen trägen Massen verlangsamt so stattfinden, dass die Stäbe in jeder Querschnitts-Axe gleichförmig deformirt wären. Erreicht wurde, kann hier nur ganz

Der Apparat zur Beobachtung bestand aus einer etwa 1200 g schweren Scheibe von 20 cm Durchmesser, welche um ihren Mittelpunkt in der Mitte einer schneide gebildete und horizontal gehalten wurde. Das zu untersuchende, vertical gestellte Stäbchen mit seinem unteren Ende ( $z = 0$ ) geeignet mit seinem oberen ( $z = L$ ) mit einer Spiralfeder verbunden, dass seine Axe dort in der Mitte der Scheibe fiel; der Mittelpunkt des Stäbchens war die Drehungsaxe der Scheibe. Wenn die Scheibe eine kleine Drehung erfuhr, so krümmte sich das Stäbchen förmig, d. h. nach einem Kreisbogen













Nr. 8.	$T = 1,080,$
„ 9.	$= 1,045,$
„ 10.	$= 1,0185$
„ 11.	$= 0,529,$
„ 12.	$= 0,525,$
„ 13.	$= 0,824,$
„ 14.	$= 0,843,$
„ 15.	$= 0,866,$

Zu diesen Zahlen ist Nr. 1)–8) sind zuerst bei für  $\alpha_p$  zeigen eine Abnahme dauer d. h. mit abnehmen hier die oben erwähnte Oberflächenschicht eine und 8) von 1 mm Dicke feilen, um diese Schicht sind als Nr. 9) und 10) 12) neu in 1,25 mm D abgefeilt und geschliffen 15) bezeichnet. Man es bei der Bearbeitung der verschwindet. Um zu untersuchen, in wie weit die Länge der Stäbchen auf  $\alpha_p$  influirt, kürzte ich das besonders werthlose Stäbchen 7) auf  $\frac{2}{3}$  seiner Länge und bezeichnete es so mit 13); das in diesem Zustande gefundene  $\alpha_p$  stimmt vollständig mit dem früheren.

Bezüglich der *Biegungsschwingungen* scheinen sonach die Beobachtungen in Bronze in Uebereinstimmung mit der Theorie der innern Reibung zu stehen, und man kann das Mittel der oben erhaltenen Zahlen mit Ausschluss von Nr. 7) und 13) nämlich

$$\alpha_p = 37,5 \cdot 10^{-6}$$

als einen ungefähren Werth der ersten Dämpfungsconstante für Bronze ansehen.

Natürlich können die Beobachtungen nun nicht mit der Boltzmann'schen Formel stimmen; es entspricht sich im Mittel (unter Ausschluss von Nr. 7 und 13)



these berechnet, wenig sicher.

**Biegung** **Messing.**

**Nr.**

„

„

„

„

„

„

„

**Im M**

$T =$	0,888	0,782	0,585
$l_p \cdot 10^{+4} =$	5,78	6,74	7,78
$\alpha_p \cdot 10^{+6} =$	24,4	25,0	28,0

$l_p$  wächst stark, während  $\alpha_p$  mehr constant ist;

$$\alpha_p = 23,8 \cdot 10^{-6}$$

kann als die erste Dämpfungsconstante für Messing angesehen werden.

**Drillung.** **Messing.**

Nr. 1.	$T = 0,438$	$l_p = 3,09 \cdot 10^{-4}$	$\alpha_p = 6,85 \cdot 10^{-6}$
„ 5.	$T = 0,441$	$l_p = 3,11 \cdot 10^{-4}$	$\alpha_p = 6,94 \cdot 10^{-6}$
„ 7.	$T = 0,305$	$l_p = 3,47 \cdot 10^{-4}$	$\alpha_p = 5,36 \cdot 10^{-6}$
„ 8.	$T = 0,318$	$l_p = 3,33 \cdot 10^{-4}$	$\alpha_p = 5,36 \cdot 10^{-6}$

Ferner ohne Verstärkungsring

Nr. 7.	$T = 0,253$	$l_p = 3,75 \cdot 10^{-4}$	$\alpha_p = 4,81 \cdot 10^{-6}$
„ 8.	$T = 0,265$	$l_p = 3,79 \cdot 10^{-4}$	$\alpha_p = 5,07 \cdot 10^{-6}$ (?)

Unter Ausschluss der letzten verdächtigen Reihe find sich im Mittel

$T =$	0,440	0,311	0,253
$l_p \cdot 10^{+4} =$	3,10	3,40	3,71
$\alpha_p \cdot 10^{-6} =$	6,89	5,36	4,81



$\alpha_\beta$  zeigt sich nahe constant; im Mittel ist <sup>1)</sup>

$$\alpha_\beta = 49,7 \cdot 10^{-6}.$$

Drillung.

Nickel.

Nr. 1.  $T = 0,310$ ,  $L = 10,8 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 16,9 \cdot 10^{-6}$

„ 2.  $T = 0,308$ ,  $L = 11,8 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 18,4 \cdot 10^{-6}$

„ 3.  $T = 0,310$ ,  $L = 11,8 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 17,8 \cdot 10^{-6}$

„ 4.  $T = 0,306$ ,  $L = 9,6 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 14,9 \cdot 10^{-6}$

„ 5.  $T = 0,214$ ,  $L = 14,4 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 15,6 \cdot 10^{-6}$

„ 6.  $T = 0,217$ ,  $L = 13,9 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 15,2 \cdot 10^{-6}$

Ohne Verstärkungsring:

Nr. 5.  $T = 0,178$ ,  $L = 16,6 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 15,9 \cdot 10^{-6}$

„ 6.  $T = 0,179$ ,  $L = 18,5 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 16,8 \cdot 10^{-6}$

Der Verlauf von  $\alpha_\gamma$  zeigt keine regelmäßige Zu- oder Abnahme mit  $T$ ; das Mittel

$$\alpha_\gamma = 16,8 \cdot 10^{-6}$$

wird daher der angenäherte richtige Werth der zweiten Dämpfungsconstante sein.

*Kupfer und Nickel scheinen nach dieser Zusammenstellung den einfachen Gesetzen der inneren Reibung nahezu zu folgen.*

Man kann daher aus den für sie gefundenen Dämpfungsconstanten  $\alpha_\beta$  und  $\alpha_\gamma$  die Reibungsmoduln und Reibungsconstanten wirklich berechnen. Hierzu sind die Elasticitätsmoduln dieser Substanzen nöthig; eigens zu ihrer Bestimmung angestellte Beobachtungen haben in absolutem Maasse ergeben:

für Kupfer:

$$s = 0,934 \cdot 10^{-12}, s_2 = 2,195 \cdot 10^{-12}, s_1 = -0,163 \cdot 10^{-12},$$

für Nickel

$$s = 0,499 \cdot 10^{-12}, s_2 = 1,300 \cdot 10^{-12}, s_1 = -0,151 \cdot 10^{-12}.$$

Nun folgt durch Combination von (16) und (17)

$$\alpha_\beta = \frac{n}{s} = \frac{2a_2}{s} (s^2 + 2s_1^2) + \frac{a_1}{s} (s + 2s_1)^2,$$

$$\alpha_\gamma = \frac{n_2}{s_2} = a_2 s_2$$

und hieraus lässt sich leicht berechnen:

1) In der Originalabhandlung steht durch ein Versehen 59,4.



$$\alpha_r \cdot 10^{+6} = 18,11 \quad 19,33 \quad 20,49$$

**Biegung.** **Aluminium.**

- Nr. 2.  $T = 0,934$ ,  $l_\beta = 8,44 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\beta = 39,9 \cdot 10^{-6}$   
 „ 3.  $T = 0,956$ ,  $l_\beta = 7,96 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\beta = 38,6 \cdot 10^{-6}$   
 „ 5.  $T = 0,684$ ,  $l_\beta = 7,24 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\beta = 25,1 \cdot 10^{-6}$   
 „ 6.  $T = 0,684$ ,  $l_\beta = 7,42 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\beta = 25,7 \cdot 10^{-6}$

**Im Mittel**

$$\begin{aligned} T &= 0,684 \quad 0,945 \\ l_\beta \cdot 10^{+4} &= 7,33 \quad 8,20 \\ \alpha_\beta \cdot 10^{+6} &= 25,4 \quad 39,3. \end{aligned}$$

**Drillung.**

- Nr. 2.  $T = 0,520$ ,  $l_\gamma = 6,39 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 16,8 \cdot 10^{-6}$   
 „ 4.  $T = 0,542$ ,  $l_\gamma = 5,66 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 15,6 \cdot 10^{-6}$   
 „ 5.  $T = 0,387$ ,  $l_\gamma = 6,00 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 11,75 \cdot 10^{-6}$   
 „ 6.  $T = 0,387$ ,  $l_\gamma = 6,49 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 12,72 \cdot 10^{-6}$

**Ferner ohne Verstärkungsring:**

- Nr. 5.  $T = 0,321$ ,  $l_\gamma = 6,00 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 9,76 \cdot 10^{-6}$   
 „ 6.  $T = 0,320$ ,  $l_\gamma = 6,44 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 10,43 \cdot 10^{-6}$



Im Mittel:

$$\begin{array}{rcccl} T = & 0,320 & 0,387 & 0,521 \\ l_\gamma \cdot 10^{+4} = & 6,22 & 6,25 & 6,03 \\ \alpha_\gamma \cdot 10^{+6} = & 10,10 & 12,24 & 16,2. \end{array}$$

$l_\gamma$  ist hier anscheinend von  $T$  nahezu unabhängig.

Biegung. Gusseisen.

Nr. 2.	$T = 0,661, l_\beta = 208 \cdot 10^{-4}$
„ 3.	$T = 0,641, l_\beta = 211 \cdot 10^{-4}$
„ 5.	$T = 0,480, l_\beta = 168 \cdot 10^{-4}$
„ 6.	$T = 0,483, l_\beta = 163 \cdot 10^{-4}$

Drillung.

Nr. 2.	$T = 0,363, l_\gamma = 131 \cdot 10^{-4}$
„ 3.	$T = 0,355, l_\gamma = 150 \cdot 10^{-4}$
„ 5.	$T = 0,269, l_\gamma = 105 \cdot 10^{-4}$
„ 6.	$T = 0,269, l_\gamma = 97 \cdot 10^{-4}$

Biegung. Cadmium.

Nr. 1.	$T = 0,892, l_\beta = 252 \cdot 10^{-4}$
„ 2.	$T = 0,901, l_\beta = 238 \cdot 10^{-4}$
„ 3.	$T = 0,908, l_\beta = 257 \cdot 10^{-4}$
„ 4.	$T = 0,921, l_\beta = 249 \cdot 10^{-4}$
„ 5.	$T = 1,208, l_\beta = 259 \cdot 10^{-4}$
„ 6.	$T = 1,220, l_\beta = 262 \cdot 10^{-4}$

Drillung.

Nr. 2.	$T = 0,545, l_\gamma = 308 \cdot 10^{-4}$
„ 6.	$T = 0,715, l_\gamma = 311 \cdot 10^{-4}$

Hier scheint bei Biegung und Drillung  $l$  nahezu constant zu sein, wie dies die Boltzmann'sche Theorie der elastischen Nachwirkung fordert.

Dies sind die Metalle, bei denen ich den Einfluss der Dimensionen und dadurch der Schwingungsdauer auf die Werthe des logarithmischen Decrementes ausführlicher untersucht habe. Bei Zinn und Silber war es nicht möglich, befriedigend übereinstimmende Zahlen zu erhalten, wahrscheinlich weil diese Substanzen durch die Bearbeitung sehr stark beeinflusst werden. Hier, wie bei Magnesium, Zink und Wismuth will ich nur die logarithmischen Decremente angeben, die ich für Stäbe von beiläufig 1 mm Dicke, 6 mm Breite und

100 mm Länge erhalten habe und Uebersicht eines Theiles meiner diejenigen Werthe beifügen, die in lichen Beobachtungstafeln sich an sionen beziehen. Ordnet man sie 1 man die folgenden Reihen, in wel *Bo* und *Me* für Gussstahl, Bronze

#### Logarithmische De

Betont mag nochmals werden wahrscheinlich isotropem Material, gegossenen und im Uebrigen unbear sind, erhalten wurden.

Die Resultate der vorstehend b sind etwa folgende.

Von den untersuchten Metall Umfanges, in dem sich die Umstän und *Nickel* nahezu die Gesetze, w für die innere Reibung fester Kör folgert sind. *Messing* und *Bronze* gel schwingungen, nicht aber bei Drillungsschwingungen; die Er scheinungen, welche sie bei letzteren zeigen, lassen sich als eine Superposition der Wirkung von innerer Reibung und elastischer Nachwirkung — letztere nach dem Boltzmann'schen Ansatz behandelt — auffassen. Cadmium liefert logarithmische Decremente, die nahezu von der Schwingungsdauer unabhängig sind und bietet demgemäss das Beispiel einer bei



## **X. Ueber die Messung der Diffusionscoefficienten von Flüssigkeiten; von F. Hienmüller.**

In Folgendem soll über eine Methode berichtet werden, die eine genaue Messung der Diffusionscoefficienten chemischer Substanzen gestattet und, was die Zuverlässigkeit der durch sie gewonnenen Resultate anbetrifft, den bisher benutzten chemischen und optischen Methoden mindestens gleichwerthig sein dürfte.

Bei genauen Messungen da-  
man die Diffusion in Röhren mit-  
lassen, um die den Vorgang stör-  
wungen, welche durch Erschüt-  
terungen hervorgerufen werden.  
Auch muss aus demselben Grund-  
satz der Richtung der Schwere

Um diese Bedingungen zu  
Versuch in folgender Weise ausf\_\_\_\_\_

Eine oben geschlossene enge Glasröhre (Diffusionsröhre) wird mit destillirtem Wasser gefüllt und mit dem offenen Ende in ein grösseres Gefäss getaucht, welches eine Lösung der Substanz von bekannter Concentration enthält. Aus der chemisch bestimmten Menge der nach einiger Zeit in die Röhre eingedrungenen Substanz kann man dann, unter der Voraussetzung, dass die Concentration im Gefässe sich während des Vorganges nicht merklich ändert, den Diffusionscoefficienten berechnen. Eine nähere Ueberlegung zeigt jedoch, dass die Ausführung des Versuches in dieser Form genaue Resultate kaum wird liefern können. Zunächst gibt der Versuch keine Entscheidung über die Zulässigkeit der Voraussetzung, da er nicht den Diffusionsvorgang in seinem ganzen Verlaufe beobachten lässt. Ausserdem dringt beim Eintauchen in die Lösung eine gewisse Quantität der Substanz in die Röhre, wie man leicht erkennt, wenn man eine mit Wasser gefüllte Röhre mit der Oberfläche einer stark gefärbten Flüssigkeit in Berührung



Flüssigkeit  $A = 1$ , so lässt sich der von  $e$  g Salmiak und 100 g der Fl

$$(1) \quad w = \frac{1 + 0,125}{1 + 1,6}$$

Nachstehende Tabelle enthält beobachteten und berechneten Wid

$e$ g	$w$ beob.	$w$	
	0,799	0	
	0,675	0	
	0,560	0	
	0,523	0,520	+ 0,003
	0,467	0,466	- 0,002
	0,429	0,429	- 0,001

Die Formel für  $w$  gilt für eine Temperatur von  $9,5^\circ$ ; da sie das Verhältniss der Widerstände von zwei verdünnten Lösungen angibt und diese nach F. Kohlrausch mit zunehmender Temperatur nahezu gleichmässig abnehmen, so ist die Formel auch noch anwendbar für Temperaturen, die um einige Grade von  $9,5^\circ$  abweichen.

Mit Hilfe der Formel für  $w$  lässt sich nun leicht berechnen, wie gross der Widerstand  $W_t$  der Röhre  $t$  Stunden nach dem Eintauchen sein wird. Bedeutet  $e$  in der Formel (1) den Gehalt an Salmiak in der Entfernung von  $x$  mm von der unteren Oeffnung, so ist offenbar, wenn der Anfangswiderstand  $= 1$  und die Länge der Röhre  $= a$  gesetzt wird:

$$W_t = \frac{1}{a} \int_0^a w dx$$

Setzt man ferner voraus, dass die Concentration der die Röhre umgebenden Flüssigkeit während der Versuchsdauer constant bleibt, so findet man aus der bekannten Differentialgleichung für die Diffusion  $\pi \partial^2 e / \partial x^2 = \partial e / \partial t$  für  $e$  die Reihe

$$e = 1 - \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2a} \tau - \frac{4}{3\pi} \sin \frac{3\pi x}{2a} \tau^3 - \dots$$

in welcher zur Abkürzung gesetzt ist

$$(2) \quad \tau = e^{-\frac{\pi^2 t}{a^2}}$$



wodurch constatirt war, dass schon beim Eintauchen in die das Eindringen zu verhindern, welches in eine nach aufwärts gezogen war. Das Capillarrohr war mit  $A$  gefüllt und seine Spitze nachdem man die Diffusionsröhre eingetaucht hatte, wurde die Röhre herausgezogen, während gleichzeitig aus der Spitze in die Röhre beobachtete Widerstand ergab in für den Röhrenwiderstand den Einfluss eines in der Leitungstromes zu annulliren, wurde die eine Widerstandsmessung ausgeführt war.

Folgende Tabelle enthält die Werthe von  $-\log r/t$ , die beim ersten Versuche erhalten wurden. Zeiteinheit 1 Stunde.

$t =$	16,9	24,4	41,9	48,7	63,7	72,8
$-\frac{\log r}{t} =$	0,00247	0,00248	0,00229	0,00225	0,00224	0,00222

Der Quotient nimmt langsam ab, sodass sich daraus ein constanter Werth des Diffusionscoefficienten nicht berechnen lässt. Die Temperatur schwankte zwischen  $8,7^{\circ}$  und  $8,2^{\circ}$ . Dass diese Abnahme des Quotienten durch so geringe Temperaturschwankungen nicht verursacht sein konnte, zeigte eine zweimalige Wiederholung des Versuches, wobei die Temperatur nahezu constant blieb und der Quotient trotzdem dasselbe Verhalten zeigte.

Um die Ursache dieser Abnahme zu ermitteln, wählte ich eine sehr enge Diffusionsröhre mit eingeschmolzenem Platindraht. Das Resultat war noch ungünstiger. Hieraus geht hervor, dass der Strom beim Uebergange aus der Flüssigkeit in eine kleine Electrode einen Widerstand überwinden muss, der mit der Zeit zunimmt. Aus diesem Grunde musste ich Versuche mit engen Röhren in dieser einfachen Form aufgeben. Aber auch eine weite Röhre von 6 mm Durchmesser und 60 mm Länge gab keine besseren Resultate. Der Quotient sank nach 96 Stunden auf die Hälfte des zuerst beobachteten Werthes. Da der Flächeninhalt des Electroden 28 qmm be-



trug, so konnte der Uebergangswiderstand nicht die Ursache der Abnahme sein. Der Versuch zeigt vielmehr klar, dass die Voraussetzung, dass die Flüssigkeit im Gefässe während des Versuches in der Nähe der Röhrenmündung eine constante Concentration behalte, nicht ganz zutreffend ist.

Um zunächst eine während der ganzen Versuchsdauer gleichbleibende Concentration zu erzielen, wurde für eine allmähliche Erneuerung der Flüssigkeit im Gefässe Sorge getragen und zwar durch Anwendung eines Tropftrichters. Das Trichterrohr wurde vermittle eines kurzen Kautschukschlauches mit einem Glasrohre verbunden, in welchem sich ein kurzer Pfropfen aus Fliesspapier befand. Durch diese Vorrichtung erzielt man ein langsames ununterbrochenes Ausfliessen aus dem Trichter. Die untere Oeffnung reichte bis auf den Boden des Gefässes. Die aus dem Trichter austretende Flüssigkeit (6 ccm pro Stunde) bewirkte ein Steigen des Flüssigkeitsniveaus in diesem Gefässe um 2 cm in 24 Stunden.

Da durch dieses Verfahren eine freilich sehr geringe Bewegung im Gefässe erzeugt wird und diese die Diffusion in weiten Röhren beeinflussen könnte, so benutzte ich bei meinen folgenden Versuchen eine enge Röhre (Durchmesser  $2r = 1.04 \text{ mm}$ ), die sich oben konisch erweiterte. In der Erweiterung (vgl. Fig. 1) war eine kreisförmige Platinelectrode von 11,9 qmm Fläche eingekittet.

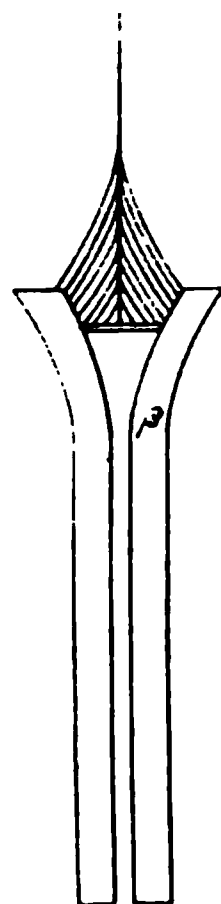


Fig. 1.

Es soll zunächst eine Formel entwickelt werden für die Concentrationen  $e$  und  $\bar{e}$  zur Zeit  $t$  in der Röhre und der Erweiterung. Bezeichnet  $\xi$  die Entfernung des Querschnittes  $q$  der Erweiterung vom Querschnitte  $\beta$ ,  $b$  die Länge der Axe der Erweiterung,  $a$  die Länge der Röhre, so gelten folgende Gleichungen:

$$(3) \quad x \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = \frac{\partial e}{\partial t},$$

$$(4) \quad x \frac{\partial}{\partial \xi} \left( q \frac{\partial \bar{e}}{\partial \xi} \right) = q \frac{\partial \bar{e}}{\partial t},$$

$$(5) \quad e_{(x=0)} = 1.$$

$$(6) \quad e_{(x=a)} = \bar{e}_{(\xi=0)},$$

$$(7) \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial n}$$

(8)

Die letzten vier Bedingungen erfüllt sein. Den Bedingungen

$$(9) \quad \epsilon = 1 + c_1 \sin(\alpha_1 z)$$

Der Querschnitt  $q$   
Annäherung durch  $\frac{2}{3}$   
 $q = r^2 \pi \epsilon^{2/3}$ . Die Gleichung

$$2\beta\pi$$

Ein partikuläres Integral

$$e^{-\beta t} (A_1 e^{i\sqrt{\beta^2 - \alpha_1^2} z})$$

Setzt man  $\sqrt{\beta^2 - \alpha_1^2} = \alpha_2$ , welche kleiner als  $\beta$

$$z = e^{-\beta t} (A_0 e^{\alpha_2 z})$$

Aus den Bedingungen (6) und (7) folgt sofort, dass  $\alpha_0 = 0$ .  $B_0 = 0$  und  $A_0 = 1$  ist. Obige Reihe geht demnach über in

$$(10) \quad z = 1 + e^{-\beta t} (A_1 e^{w_1 z} + B_1 e^{-w_1 z}) e^{-\alpha_1^2 \pi t} + \dots$$

Aus den Bedingungen (6), (7) und (8) ergeben sich ferner die Gleichungen:

$$(11) \quad \begin{cases} A_1 + B_1 = C_1 \sin(\alpha_1 a) \\ A_1(-\beta + w_1) - B_1(\beta + w_1) = \alpha_1 c_1 \cos(\alpha_1 a) \\ A_1(-\beta + w_1) - B_1(\beta + w_1) e^{-2b w_1} = 0. \end{cases}$$

Die Elimination von  $A_1$ ,  $B_1$  und  $C_1$  aus diesen Gleichungen liefert für  $\alpha_1$  die Gleichung

$$(12) \quad \alpha_1 \operatorname{tg}(\alpha_1 a) + \frac{\alpha_1^3}{\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha_1^2}} = \frac{2\sqrt{\beta^2 - \alpha_1^2}}{e^{2b\sqrt{\beta^2 - \alpha_1^2}} - 1}.$$

Wenn aus dieser Gleichung die Grössen  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2 \dots$  berechnet sind, findet man

$$(13) \quad B_{\lambda} = - \frac{\alpha_{\lambda} c_{\lambda} \cos(\alpha_{\lambda} a)}{(\beta + w_{\lambda})(1 - e^{-2bw_{\lambda}})}$$

und

$$A_{\lambda} = \frac{\alpha_{\lambda} c_{\lambda} \cos(\alpha_{\lambda} a) e^{-2bw_{\lambda}}}{(\beta - w_{\lambda})(1 - e^{-2bw_{\lambda}})}.$$

Es sind demnach nur noch die Coefficienten  $c_{\lambda}$  unbekannt, welche dadurch bestimmt werden, dass, wenn  $t = 0$  ist, die Functionen  $e$  und  $\bar{e}$  für alle Werthe von  $x$  und  $\xi$  verschwinden müssen. Für  $t = 0$  gehen demnach die Reihen (9) und (10) über in die beiden folgenden:

$$(14) \quad -1 = f_1(x) + f_2(x) + \dots$$

$$(15) \quad -e^{\beta\xi} = \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi) + \dots$$

In der ersten Gleichung ist  $f_{\lambda}(x) = c_{\lambda} \sin(\alpha_{\lambda} x)$ , in der zweiten  $\varphi_{\lambda}(\xi) = A_{\lambda} e^{w_{\lambda}\xi} + B_{\lambda} e^{-w_{\lambda}\xi}$ . Berücksichtigt man, dass  $f_{\lambda}'' = -\alpha_{\lambda}^2 f_{\lambda}$  und  $\varphi_{\lambda}'' = w_{\lambda}^2 \varphi_{\lambda}$ , so kann man leicht beweisen, dass, falls  $\lambda \leq \mu$ ,

$$(16) \quad \int_0^a f_{\lambda} f_{\mu} dx + \int_0^b \varphi_{\lambda} \varphi_{\mu} d\xi = 0$$

ist. Der Beweis ergibt sich aus den bekannten Beziehungen:

$$\int_0^a f_{\lambda} f_{\mu} dx = \frac{(f_{\lambda} f_{\mu}' - f_{\mu} f_{\lambda}')_0^a}{\alpha_{\lambda}^2 - \alpha_{\mu}^2}$$

$$\int_0^b \varphi_{\lambda} \varphi_{\mu} d\xi = \frac{(\varphi_{\lambda} \varphi_{\mu}' - \varphi_{\mu} \varphi_{\lambda}')_0^b}{-w_{\lambda}^2 + w_{\mu}^2}.$$

Da die Nenner gleich sind, so folgt aus den Bedingungen (6), (7) und (8) die Richtigkeit der Gleichung (16). Multipliciren wir demnach (14) beiderseits mit  $f_{\lambda} dx$  und (15) mit  $\varphi_{\lambda} d\xi$ , integriren die erste Gleichung von 0 bis  $a$ , die zweite von 0 bis  $b$  und addiren, so ist

$$-c_{\lambda} \int_0^a \sin(\alpha_{\lambda} x) dx - \int_0^b e^{\beta\xi} \varphi_{\lambda}(\xi) d\xi = c_{\lambda}^2 \int_0^a \sin^2(\alpha_{\lambda} x) dx + \int_0^b \varphi_{\lambda}^2(\xi) d\xi.$$

Mit Rücksicht auf die aus den Differentialgleichungen sich ergebenden Rechenvortheile findet man für die linke Seite den

Werth  $= c_1 / \alpha$ ,  
aus (13) in  $\varphi_2$   
rechte Seite, so

$$(17) \quad c_1 =$$

wenn

$$c_1 = \frac{e^{2\beta w_1} - 1}{2\beta w_1}$$

Durch die  
in den Reihen  
folglich lässt si  
numerisch besti

Die Consta  
 $\delta = 6,9 \text{ mm}$ ,  $\beta$   
kleinsten Wur  
und (13) findet  
 $B_1 = -0,0766$

Als Lösun  
den Versuche  
nutzt. Für die

angestellten Beobachtungen statt (1) die Formel

$$(18) \quad w = \frac{1 + 0,1428 e}{1 + 1,3968 e}$$

Folgende Tabelle, in welcher  $e^{-\alpha^2 w^2} = \tau$  gesetzt ist,  
gibt die für einige Werthe von  $\tau$  berechneten Widerstände  
der Röhre mit Einschluss der Erweiterung:

$\tau =$	1	0,9	0,85	0,80	0,75
$W_1 =$	1	0,689	0,650	0,631	0,613

Aus den Zahlen der Tabelle leitet man leicht die Formel ab

$$(19) \quad W_t = \frac{1 + 11,674 (1 - \tau)}{1 + 21,5 (1 - \tau)}$$

Die beobachteten Widerstände zur Zeit  $t$  sind in nach-  
stehender Tabelle wiedergegeben:

$t =$	18,8	22,5	25,1	29,0	45,7	49,4
$W_t =$	0,7231	0,7055	0,6969	0,6887	0,6489	0,6414
$\tau =$	0,9286	0,9157	0,9085	0,9007	0,8458	0,8305
$-\log \tau$	0,00175	0,00169	0,00165	0,00163	0,00159	0,00163



überschreite, so findet man aus (20), Genauigkeit setzen kann  $\alpha_1^2 \alpha^2 = \pi / l$  Berechnung der Coefficienten  $c_1, c_2, \dots$  für die Concentration  $c$  in der Röhre

$$(21) \quad c = 1 - \frac{x}{a} - \frac{2x}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) - \frac{2x^2}{2\pi} \pi$$

$\tau$  ist  $= e^{-\pi^2 t / a^2}$ . Die Reihe verschw von  $t$ , wenn  $x = a$  ist. Eine Erweiterung



Fig. 2.

50mal so grosses Volumen wirkt also wie ein Raum, seine Concentration durchsuchedauer in ihn diffundirte Menge nicht merklich zur Form der Erweiterung Einfluss, man kann das kugelförmigen Erweiterung Fig. 2 benutzen, wodurch der Electroden  $c$  gestattet

Aus (21) und (18) findung folgende Werthe für

$$\begin{aligned} \tau &= 1 \quad 0,75 \quad 0 \\ W_t &= 1 \quad 0,8595 \quad 0, \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich zwischen 0,75 und 0,50

$$H_t = 0,6615 + 0,$$

Der nachstehend mitgetheilte Versuch wurde mit einer Röhre angestellt von 44,2 mm Länge und 2 mm Durchmesser, deren Kugel ein Volumen von 6,2 ccm hatte. Die Temperatur sank während der 36stündigen Beobachtungszeit von 15,1° auf 14,9°.

$\tau =$	14,2	18,7	21,3	24,3	35,3
$W_t =$	0,8481	0,8234	0,8084	0,7978	0,7621
$\tau =$	0,713	0,632	0,582	0,541	0,413
$-\log \frac{\tau}{t} =$	0,0103	0,0107	0,0110	0,0110	0,0109

Die geringen Abweichungen der Zahlen der letzten Reihe von ihrem Mittelwerthe 0,0108 dürften lediglich auf Beob-

htungsfehler zurückzuführen sein. Der Mittelwerth ergibt aus der Formel  $e^{-\kappa \pi^2 t / a^2} = \tau$  für  $\kappa$  den Werth 4,93 (mm<sup>2</sup>/Stunde), welcher von dem oben angegebenen Werthe 4,97 wenig abweicht.

Ich habe die Absicht, womöglich in nächster Zeit für eine Reihe von Substanzen die Diffusionscoefficienten nach dieser Methode zu bestimmen.

Osnabrück, den 19. September 1892.

## **XI. Ueber die absolute Silbers; u (Maus 2**

1. Die meisten Phys  
pressibilität der Flüssigkei  
selbe vom experimentellen  
Regnault, welcher seine  
von Lamé verglich. Es w  
esse, eine vergleichende  
gegebenen Methoden von  
zuführen, und zwar, wenn  
tellen Bedingungen. Dem  
das Queckulber: Erstens,  
wesentlich voneinander ab  
ten zuschreiben; zweitens,  
alle andere Flüssigkeiten.  
gleichung mit aller Strenge durchgeführt werden.

Zur Zeit, als ich mich mit der Untersuchung dieses Gegenstandes beschäftigte, publicirte Hr. Amagat<sup>2)</sup> eine Abhandlung über dasselbe Thema; trotzdem der Plan seiner Arbeit und die Hilfsmittel, deren er sich bediente, andere waren, hatte ich doch die Freude zu erfahren, dass er mit mir zu einer übereinstimmenden Lösung der Frage gekommen ist.

2. Der Plan meiner Untersuchung war folgender:

- a) Es wurden vier cylindrische Piezometer mit halbsphärischen Endungen aus deutschem Glase von verschiedener Wanddicke (1,4 mm bis 2,9 mm) verwendet;
- b) jedes Piezometer wurde nach Regnault's
- c) und gleichzeitig nach Jamin's Methode untersucht;

---

1) Mitgetheilt der Naturforschergesellschaft der Universität Odessa den 8. Nov. 1890. Vgl. die Abhandlungen derselben, Mathem. Abth. 18. p. 109—227. 1891.

2) Amagat, Journ. de phys. (2) 8. p. 197. 1889, oder Ann. de chim. et de phys. (6) 22. p. 137. 1891.





(Taf. VIII, Fig. 12) bestand aus langen Capillare  $bc$  und einer das Rohr  $de$  mit der Carré's In die Erweiterung  $cd$  wurde gegossen, welches genügte, um sondern noch einen Theil der wurde die Luft bis auf 1 mm  $abcde$  mittels eines Brenners wärmt. Zu diesem Zwecke ein halbcylindrisches Eisenblech mittels Asbest in den Punkten lichen Eisenblech dicht bedeckt 15—20 Minuten und dann die Flamme gelöscht wurde. Das sich mit dem Quecksilber. Nach dem ersten Sieden noch bleiben, und wiederholte das dem zweiten Sieden fand ich

Als das Piezometer bei schnitt ich die Erweiterung Capillare  $bc$  eine graduirte

graduirte Capillare  $C$  immer rein und trocken halten kann. Während meiner Untersuchungen benutzte ich diese Operation jedesmal, wenn die Capillare  $C$  feucht oder unrein erschien.

5. Das Piezometer wurde nachher mit gutem Siegellack in eine T-förmige Messinghülse  $aa$  (Fig. 13) eingekittet, und zwar so tief, dass das halbkugelförmige Ende bei der Capillare  $C$  bedeckt wurde; dies war nothwendig wegen der leichten Zerbrechlichkeit des mit Quecksilber gefüllten Piezometers.

Ausserdem<sup>1)</sup> verwandte ich:

a) Eine Cailletet'sche Pumpe, welche einen Druck bis 9,8 Atm. aushielt;

b) ein Luftmanometer und ein Quecksilbermanometer; die Zimmertemperatur des Luftthermometers wurde durch Wasser constant erhalten;

c) zwei Thermometer. Die Temperatur des Bades, worin sich der ganze Apparat (Fig. 13) befand, wurde auf einem bis

1) Vgl. G. de Metz, Wied. Ann. 41. p. 664—668. 1890.



nur mittels Schrauben, Mutttern und Metal  
— der Druck bleibt sehr constant.

6. Die Regnault'sche Methode zu Formeln der Elasticitätstheorie, welche Bestimmung der Piezometer-Dimensionen feinsten Messungen in diesem Gebiete inneren  $R_0$ - und äusseren  $R_1$ -Radien dieselbe wurde mit einem bis auf Piezometer ausgeführt. In folgender Tabelle werthe von  $R_0$  und  $R_1$  gegeben; je Massen erhalten. Zwei Ringe wurden unteren (b)-Ende des Piezometerrohres abgeschnitten und jeder Ring wurde Durchmessern im Abstände von 45°

Tabelle I.

Constanten von  $R_1$  und  $R_0$  der P

Nummer und Art des Glases	$R_1$
	mm
I { Greiner & Co. in Stützerbach	10,221
II { bei Ilmenau in Thüringen	9,816
III { E. Gundelach in Gehlberg	10,156
IV { bei Elgersburg in Thüringen	9,288

Es ist aber von Wichtigkeit, hier in die Radien  $R_{1(a)}$  und  $R_{1(b)}$ , sowie  $R_{0(a)}$  zu abwichen, da dieser Unterschied die Cylinders charakterisirt und in theoretischer Rolle spielt.

Tabelle II.

Radienveränderungen längs der Cyl

Nr.	$R_{1(a)}$	$R_{1(b)}$	$\Delta R_1 = R_{1(a)} - R_{1(b)}$	$R_{0(a)}$
	mm	mm	mm	mm
I	10,221	10,275	- 0,054	8,608
II	9,235	9,897	- 0,162	7,177
III	10,017	10,295	- 0,278	7,615
IV	9,431	9,145	+ 0,286	6,452



Radien der cylindrischen und sphärischen Theile einander gleich bleiben.

8. Wir haben also mit folgenden Grössen zu thun:  $R_1, R_2, U_0, V_0, W_0, \theta, \theta', \theta''$  und  $\gamma$ , um nach Lamé die Coefficienten der absoluten Compressibilität  $\chi_v$ , der scheinbaren  $\chi_s$  und der kubischen  $\kappa$  des Piezometers zu berechnen. Aber die von Lamé<sup>1)</sup> gegebenen Gleichungen sind auf die Hypothese gegründet, dass die sogenannte Poisson'sche Constante  $\sigma$ , d. i. die Dilation des festen Körpers hier nicht eintrifft, welche Hypothese, welche wir nicht haben, denn es ist eine Frage.<sup>2)</sup> Wir haben also die Lamé'schen Gleichungen für Young's Modulus und Compressibilität

$$(1) \quad E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\mu + \lambda},$$

$$(2) \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)},$$

$$(3) \quad \kappa = \frac{3}{3\lambda + 2\mu}.$$

Es ist leicht, die nöthigen Gleichungen für cylindrische sowie für sphärische Umhüllungen herzustellen: Es sei ein homogener und isotroper Hohlcyylinder mit ebenen Böden gegeben, welcher einen inneren Druck  $P_0$  und einen äusseren  $P_1$  erleidet; es sei die Länge  $H$  dieses Cylinders so gross, dass man den Einfluss der Böden vernachlässigen kann; es sei  $\varrho$  die Verschiebung des Theilchens, welches sich in der zur Cylinderaxe senkrechten Ebene befindet und dessen Abstand von dieser Axe in der Radiusrichtung  $r$  ist. Lamé<sup>3)</sup> hat

1) Regnault, Mém. de l'institut de France. 21. p. 438—442. 1847.

2) Wir haben diese Frage behandelt im zweiten Kapitel unserer russischen Abhandlung p. 158—179.

3) Lamé, Leçons sur l'élasticité des corps solides. p. 189. Paris, 1867.

gezeigt, dass diese Verschiebung durch folgende Gleichung mit zwei Constanten  $a$ ,  $b$  dargestellt wird:

$$(4) \quad \varrho = a r + \frac{b}{r}.$$

Ausser der Verschiebung in der Richtung des Radius ist noch eine andere  $\xi$  möglich in der Richtung  $H$  der Cylinderaxe; sie wird bestimmt mittels der Gleichung mit einer Constante  $c$ :

$$(5) \quad \xi = c H.$$

Haben  $R_1$ ,  $R_0$ ,  $P_1$ ,  $P_0$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  die obenerwähnten Bedeutungen, so drückt man die Constante  $a$ ,  $b$ ,  $c$  folgendermaassen aus:

$$(6) \quad a = c = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{R_0^2 P_0 - R_1^2 P_1}{R_1^2 - R_0^2},$$

$$(7) \quad b = \frac{1}{2\mu} \frac{R_0^2 R_1^2 (P_0 - P_1)}{R_1^2 - R_0^2}.$$

Führen wir diese Werthe von  $a$ ,  $b$ ,  $c$  in die Gleichungen (4) und (5) ein, so bekommen wir für  $\varrho$  und  $\xi$  die Ausdrücke:

$$(8) \quad \varrho = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{R_0^2 P_0 - R_1^2 P_1}{R_1^2 - R_0^2} \cdot r + \frac{1}{2\mu} \frac{R_0^2 R_1^2 (P_0 - P_1)}{R_1^2 - R_0^2} \frac{1}{r},$$

$$(9) \quad \xi = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{R_0^2 P_0 - R_1^2 P_1}{R_1^2 - R_0^2} \cdot H.$$

Mittels dieser zwei Ausdrücke kann man die Volumenveränderung  $\Delta U_0$  bestimmen, wenn man bemerkt, dass unter dem Einflusse der äusseren Kräfte der Radius  $R_0$  sich in  $R_0 + \varrho$  und die Höhe  $H$  in  $H + \xi$  verändert. Das neue Volumen

$$(10) \quad U_0 + \Delta U_0 = \pi (R + \varrho)^2 (H + \xi).$$

und die Volumenvergrösserung

$$(11) \quad \Delta U_0 = 2\pi R_0 H \varrho + \pi R_0^2 \xi,$$

oder auf Einheit des Volumens bezogen

$$(12) \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = \frac{2\varrho}{R_0} + \frac{\xi}{H}.$$

Um aus der letzten Gleichung diesen Werth wirklich zu berechnen, benutzen wir die Gleichung (8), indem wir darin  $r = R_0$  setzen und die Gleichung (9); dann haben wir:

$$(13) \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = \frac{3}{3\lambda + 2\mu} \frac{R_0^2 P_0 - R_1^2 P_1}{R_1^2 - R_0^2} + \frac{1}{\mu} \frac{R_1^2 (P_0 - P_1)}{R_1^2 - R_0^2}.$$

Dieser Ausdruck ist ganz allgemein. Wir werden diejenigen Volumenveränderungen betrachten, welche in Compressibilitätsversuchen der Flüssigkeiten eintreten, und Einfachheit wegen bezeichnen wir ein für alle Mal:

$$(14) \quad \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_0^2} = M; \quad \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_0^2} = M + 1.$$

a) Es sei  $P_1 = 0$ , dann:

$$(15) \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = P_0 \left\{ \frac{8M}{3\lambda + 2\mu} + \frac{M+1}{\mu} \right\},$$

oder

$$(16) \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = P_0 \left\{ \frac{M(5\mu + \lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \right\},$$

und nach der Bezeichnung (3):

$$(17) \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = P_0 \kappa \left\{ \frac{M(5\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{3\mu} \right\}.$$

b) Es sei  $P_0 = 0$ , dann:

$$(18) \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = -P_1 \left\{ \frac{3(M+1)}{3\lambda + 2\mu} + \frac{M+1}{\mu} \right\},$$

oder

$$(19) \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = -P_1 \frac{(M+1)(5\mu + 3\lambda)}{\mu(3\lambda + 2\mu)},$$

und nach der Bezeichnung (3):

$$(20) \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = -P_1 \kappa \frac{(M+1)(5\mu + 3\lambda)}{3\mu}.$$

c) Es sei  $P_1 = P_0 = P$ , dann:

$$(21) \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = -\frac{3P}{3\lambda + 2\mu} = -\kappa P.$$

Aus den Gleichungen (17), (20), (21) erhält man die Originalformel von Lamé,<sup>1)</sup> indem man  $\lambda = \mu$  setzt, nämlich:

$$(17') \quad a) \quad P_1 = 0; \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = \frac{8M+5}{3} \kappa P_0,$$

$$(20') \quad b) \quad P_0 = 0; \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = -\frac{8(M+1)}{3} \kappa P_1,$$

$$(21') \quad c) \quad P_1 = P_0 = P; \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = -\frac{3P}{5\mu} = -\kappa P.$$

9. Es bleibt noch übrig, ähnliche Gleichungen für sphärischen Theile des Piezometers zu erhalten. Wenden

1) Regnault, l. c. p. 440.





vorigen Paragraphen untersucht wurden, und setzen wir wieder der Kürze wegen:

$$(30) \quad \frac{R_0^3}{R_1^3 - R_0^3} = N; \quad \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} = N + 1.$$

Dann:

$$(31) \quad a) P_1 = 0; \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = \frac{3NP_0}{3\lambda + 2\mu} + \frac{3(N+1)P_0}{4\mu},$$

oder

$$(32) \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = 3P_0 \left\{ \frac{N(6\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{4\mu(3\lambda + 2\mu)} \right\},$$

und nach der Bezeichnung (3)

$$(32') \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = \kappa P_0 \left\{ \frac{N(6\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{4\mu} \right\}.$$

$$(33) \quad b) P_0 = 0; \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = -3P_1(N+1) \left\{ \frac{1}{3\lambda + 2\mu} + \frac{1}{4\mu} \right\},$$

oder

$$(34) \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = -\frac{3P_1(N+1)(6\mu + 3\lambda)}{4\mu(3\lambda + 2\mu)},$$

und nach der Bezeichnung (3)

$$(34') \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = -\frac{\kappa P_1(N+1)(6\mu + 3\lambda)}{4\mu}.$$

$$(35) \quad c) P_1 = P_0 = P; \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = -\frac{3P}{3\lambda + 2\mu} = -\kappa P.$$

Aus den Formeln (32'), (34), (35) bekommen wir dieselben von Lamé<sup>1)</sup>, indem wir setzen  $\lambda = \mu$ , nämlich:

$$(32'') \quad a) P_1 = 0; \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = \frac{9N+5}{4} \kappa P_0.$$

$$(34'') \quad b) P_0 = 0; \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = -\frac{9(N+1)}{4} \kappa P_1.$$

$$(35') \quad c) P_1 = P_0 = P; \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = -\frac{3P}{5\mu} = -\kappa P.$$

Auf Grund der in den zwei letzten Paragraphen enthaltenen Werthe lässt sich die Volumenveränderung eines complicirten Piezometers, welches eine Form des Cylinders mit halbsphärischen Endungen hat, berechnen, man muss aber die bekannte Hypothese hinzufügen, dass die Volumenveränderung des gesammten Volumen

$$(36) \quad \Delta W_0 = \Delta U_0 + \Delta V_0.$$

1) Lamé. Regnault, l. c. p. 439.

In diesem Falle erhalten wir die folgende Tabelle der Formeln:

$$(37) \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } P_1 = 0; \quad \Delta W_0 = P_0 U_0 \left\{ \frac{M(5\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \right\} \\ \quad + 3 P_0 V_0 \left\{ \frac{N(6\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{4\mu(3\lambda + 2\mu)} \right\}, \end{array} \right.$$

oder

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} \Delta W_0 = P_0 \kappa U_0 \left\{ \frac{M(5\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{3\mu} \right\} \\ \quad + P_0 \kappa V_0 \left\{ \frac{N(6\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{4\mu} \right\}. \end{array} \right.$$

$$(38) \left\{ \begin{array}{l} \text{b) } P_0 = 0; \quad \Delta W_0 = - \left\{ \frac{P_1 U_0 (M+1)(5\mu + 3\lambda)}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \right. \\ \quad \left. + \frac{3 P_1 V_0 (N+1)(6\mu + 3\lambda)}{4\mu(3\lambda + 2\mu)} \right\}, \end{array} \right.$$

oder

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} \Delta W_0 = - \left\{ \frac{P_1 \kappa U_0 (M+1)(5\mu + 3\lambda)}{3\mu} \right. \\ \quad \left. + \frac{P_1 \kappa V_0 (N+1)(6\mu + 3\lambda)}{4\mu} \right\}. \end{array} \right.$$

$$(III) \text{ c) } P_1 = P_0 = P; \quad \Delta W_0 = - \frac{3P}{3\lambda + 2\mu} (U_0 + V_0) = - \kappa P W_0.$$

Aus den Formeln (I), (II), (III) erhält man dieselben von Lamé<sup>1)</sup>, nach der Voraussetzung  $\lambda = \mu$ , nämlich:

$$(I') \text{ a) } P_1 = 0; \quad \Delta W_0 = \left\{ \frac{8M+5}{3} U_0 + \frac{9N+5}{4} V_0 \right\} \kappa P_0.$$

$$(II') \text{ b) } P_0 = 0; \quad \Delta W_0 = - \left\{ \frac{8(M+1)}{3} U_0 + \frac{9(N+1)}{4} V_0 \right\} \kappa P_1.$$

$$(III') \text{ c) } P_1 = P_0 = P; \quad \Delta W_0 = - \kappa P W_0.$$

Entsprechend dieser Tabelle können wir uns klar den Compressibilitätsprocess der Flüssigkeiten vorstellen. Nehmen wir z. B. an, dass ein und derselbe Druck innerhalb und ausserhalb des Piezometers ausgeübt wird — was wirklich bei den meisten Experimenten seit Canton gefunden wurde und sich bis jetzt bestätigt hat — d. h.  $P_1 = P_0 = P$ , so beobachten wir eine Senkung  $\theta''$  des Niveau in der Capillare C; dieselbe besteht aber nicht aus blossem Sinken, welches als Wirkung der Flüssigkeitscompressibilität allein betrachtet werden soll, sondern sie enthält auch das Steigen, welches nach der

1) Lamé. Regnault, l. c. p. 442.

Gleichung (herkommen  
nennen der  
den Coef  
bezeichnet,  
Compressib  
(IV)

Die B  
Niveauverh  
eines Insee  
(II'), also  
(V)  $\approx P_1$ .

Das Vorzei  
gesetzte Ze  
10. W  
Größen  $\theta'$ ,  
zuklären. O  
das der wal  
Herabsinken  
auch die  
welche sich

$$\theta = \theta' + \epsilon$$

oder

$$\theta = \theta' + \kappa$$

da aber be  
die letzten  
hat man  
(VI)

Diese Glei  
genannt;  $\kappa$   
seiner Exp



c) Dann erhalten  
den Gleichungen (VI)

Es scheint mir,  
der vorgeschlagenen  
nach derselben der  
Verschiebung  $\theta - \theta'$   
wie bei Regnault,  
überhaupt zweckdienl  
compressibeln Flüss  
stimmung des Zusam  
und der Temperatur  
arbeitung meiner Ber  
von Regnault und  
gewendet und erhielt  
man aus den beifolge

12. Es ist no  
Jamin'schen Experi  
nennt Jamin den Co  
einer Flüssigkeit die  
und Volumen Einheit

(IX)

$\gamma$  ist die Niveauverä  
e, f). Dieser Ausdr  
der Gleichung (VII),  
des Correctionsrohres  
Dilatation  $\Theta_0$ , d. h.  
klang sein mit der E

da dieses aber nicht  
bewiesen. Wir fande  
Ausdehnung  $\Theta_0$  (VI  
lichen Ausdrücke für  
gleichen. Die Volum  
allerdings nichts An

---

1) Jamin, Compt.  
Etude de la Compressibi  
1—35 in 4°. 1876.

dem anfänglichen äusseren Volumen  $W_1$  des Piezometers bei  $P_0 = 0$  und dem endlichen  $W_1 + \Delta W_1$  bei gewissem Drucke  $P_0$ . Berechnen wir — bei der Annahme, dass wieder  $\Delta W_1 = \Delta U_1 + \Delta V_1$ , — die Volumenvergrösserung  $\Delta W_1$  für jeden Theil besonders: besonders für den cylindrischen Theil  $\Delta U_1$  des Piezometers und besonders für den sphärischen  $\Delta V_1$ . Zu diesem Zwecke kehren wir zurück zu den Gleichungen (8), (9) und setzen in der Gleichung (8)  $r = R_1$ ; dann, übereinstimmend mit der Gleichung (12):

$$(39) \quad \frac{\Delta U_1}{U_1} = \frac{2\varrho}{R_1} + \frac{\xi}{H},$$

oder nach der Substitution von  $\varrho$  und  $\xi$  durch die entsprechenden Grössen

$$(40) \quad \frac{\Delta U_1}{U_1} = \frac{3}{3\lambda + 2\mu} \frac{R_0^3 P_0 - R_1^3 P_1}{R_1^3 - R_0^3} + \frac{1}{\mu} \frac{R_0^3 (P_0 - P_1)}{R_1^3 - R_0^3}.$$

Diese allgemeine Gleichung kann vereinfacht werden, da das Experiment nur bei innerem Drucke  $P_0$  stattfindet; infolgedessen setzen wir  $P_1 = 0$  und

$$(41) \quad \frac{\Delta U_1}{U_1} = M P_0 \left\{ \frac{3}{3\lambda + 2\mu} + \frac{1}{\mu} \right\}.$$

oder

$$(42) \quad \Delta U_1 = \frac{M P_0 U_1 (5\mu + 3\lambda)}{\mu (3\lambda + 2\mu)},$$

und nach der Bezeichnung (3)

$$(43) \quad \Delta U_1 = \frac{M P_0 U_1 \kappa (5\mu + 3\lambda)}{3\mu},$$

oder, bei der Annahme  $\lambda = \mu$

$$(44) \quad \Delta U_1 = \frac{8 M P_0 U_1 \kappa}{3}.$$

Um die Volumenveränderung  $\Delta V_1$  berechnen zu können, wenden wir uns an die Gleichung (25) und ersetzen in derselben  $r$  durch  $R_1$ , dann ist der Gleichung (28) nach

$$(44) \quad \frac{\Delta V_1}{V_1} = \frac{3\varrho}{R_1} = \frac{3(R_0^3 P_0 - R_1^3 P_1)}{(3\lambda + 2\mu)(R_0^3 - R_1^3)} + \frac{3}{4\mu} \frac{R_0^3 (P_0 - P_1)}{R_1^3 - R_0^3},$$

aber da wieder  $P_1 = 0$ , so schreiben wir einfacher

$$(45) \quad \frac{\Delta V_1}{V_1} = \left\{ \frac{3}{3\lambda + 2\mu} + \frac{3}{4\mu} \right\} N P_0,$$

oder

$$(46) \quad \Delta V_1 = \frac{3 N P_0 V_1 (6\mu + 3\lambda)}{4\mu (3\lambda + 2\mu)},$$

und nach der Bezeichnung (3)

$$(47) \quad \Delta V_1 = \frac{N P_0 V_1 \kappa (6\mu + 3\lambda)}{4\mu},$$

oder, bei der Annahme  $\lambda = \mu$ ,

$$(47') \quad \Delta V_1 = \frac{9 N P_0 V_1 \kappa}{4}.$$

Nun setzen wir zusammen den vollen Ausdruck der Volumenveränderung

$$(48) \quad \gamma = \Delta W_1 = \Delta U_1 + \Delta V_1$$

auf Grund der Gleichungen (43), (47) und bekommen endlich:

$$(49) \quad \gamma = P_0 \kappa \left\{ \frac{(5\mu + 3\lambda)}{3\mu} M U_1 + \frac{(6\mu + 3\lambda)}{4\mu} N V_1 \right\}.$$

Es bleibt jetzt nichts übrig, als die Ausdrücke von  $\gamma$  (49) und  $\Theta_0$  (VIII) mit einander zu vergleichen. Bilden wir ihre Differenz:

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma - \Theta_0 &= P_0 \kappa \left[ \frac{(U_1 - U_0) M (5\mu + 3\lambda)}{3\mu} + \frac{(V_1 - V_0) N (6\mu + 3\lambda)}{4\mu} \right. \\ &\quad \left. (-3\lambda + 2\mu) \left\{ \frac{U_0}{3\mu} + \frac{V_0}{4\mu} \right\} \right] \end{aligned} \right.$$

und bemerken, dass

$$(51) \quad (U_1 - U_0) M = U_0 (a) \text{ und } (V_1 - V_0) N = V_0 (b),$$

so bekommen wir:

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma - \Theta_0 &= P_0 \kappa \left\{ \frac{U_0}{3\mu} (5\mu + 3\lambda - 3\lambda - 2\mu) \right. \\ &\quad \left. + \frac{V_0}{4\mu} (6\mu + 3\lambda - 3\lambda - 2\mu) \right\}. \end{aligned} \right.$$

und schliesslich:

$$(53) \quad \gamma - \Theta_0 = P_0 \kappa (U_0 + V_0) = P_0 \kappa W_0.$$

Beziehen wir diese Differenz auf die Einheit des Druckes und des Volumens, so erhalten wir

$$(54) \quad \frac{\gamma - \Theta_0}{P_0 W_0} = \kappa$$

Dieses theoretische Resultat zeigt uns, dass die Jamin'sche Annahme über die Rolle des Correctionsrohres nicht richtig war, dass das Correctionsrohr nicht die elastische Ausdehnung des Piezometers bestimmen kann. Indem wir zur





so sehen wir, dass dies gleich Eins ist, da

$$U_0(M+1) = U_1 M \text{ und } V_0(N+1) = V_1 N,$$

d. h.

$$(X) \quad \gamma = \theta'.$$

14. Es bleibt jetzt nichts übrig, als alle diese theoretischen Betrachtungen durch das directe Experiment zu rechtfertigen. Da aber an meisten die erwähnten Formeln einige Schwierigkeiten bieten bei der Behandlung der beiden Elasticitätsconstanten  $\lambda$  und  $\mu$ , so suchte ich zugleich nach dem Verhältnisse des Coefficienten  $\lambda$  zu dem Coefficienten  $\mu$  nur für das Glas allein, woraus meine Piezometer bestanden. Ich fand aus meinen eigenen Untersuchungen, sowie aus denen meiner Vorgänger, dass in der That die Poisson'sche Constante  $\sigma$  des Glases (im Mittel  $\sigma = 0,247$ ) sich dem theoretischen Werthe ( $\sigma = 0,250$ ) annähert, und dass die vereinfachten Lamé'schen Formeln als erste Annäherung vollständig dienen können.

Tabelle V.

Poisson'sche Constante  $\sigma$  für das Glas.

Name	Art des Glases	$\sigma$	Name	Art des Glases	$\sigma$
Wertheim <sup>1)</sup>	Bleiglas Choisy-le-Rois . . . . .	0,321	Amagat <sup>9)</sup>	Gewöhnl. franz. . .	0,245
Maxwell <sup>2)</sup>	Unbekanntes . . .	0,332	Amagat <sup>9)</sup>	Bleiglas Guilbert	
Everett <sup>3)</sup>	Flintglas Nr. I James Couper & Sons, Glasgow .	0,258	Cantone <sup>10)</sup>	Martin . . . . .	0,250
Everett <sup>4)</sup>	Flintglas Nr. II A. & R. Cochran Glasgow . . . . .	0,229	Kowalsky <sup>11)</sup>	Unbekanntes . . .	0,257
Cornu <sup>5)</sup>	Saint-Gobain . . .	0,237	Kowalsky <sup>12)</sup>	Greiner & Friedrichs . . . . .	0,226
Voigt <sup>6)</sup>	Guinand in Paris	0,213	Mercadier <sup>13)</sup>	Greiner & Friedrichs . . . . .	0,212
Voigt <sup>7)</sup>	Rheinisches . . . .	0,208	De Metz . .	Saint-Gobain u. a.	0,250
			De Metz . .	Greiner & Cie. . .	0,237
			De Metz . .	Gundelach . . . .	0,235
				Franz. Bleiglas . .	0,236

1) Wüllner, Lehrb. d. Experimentalphysik. 1. p. 227. Leipzig, 1882

2) Everett, Phil. Trans. 156. p. 191. 1866.

3) Everett, Phil. Trans. 158. p. 369. 1868.

4) Everett, Phil. Trans. 158. p. 369. 1868.

5) Cornu, Compt. rend. 69. p. 333. 1869.

6) Voigt, Wied. Ann. 15. p. 510. 1882.

7) Voigt, Wied. Ann. 15. p. 513. 1882.

8) Amagat, Journ. de phys. (2) 8. p. 365. 1889.

9) Amagat, Journ. de phys. (2) 8. p. 365. 1889.

10) Cantone. Amagat, l. c. p. 366.

11) Kowalsky, Wied. Ann. 36. p. 313. 1889.

12) Kowalsky, Wied. Ann. 39. p. 155. 1890.

13) Mercadier, Compt. rend. 105. p. 105. 1887.



genannt  
reihen  
aus 10  
Größen  
9,8 At  
Baromet

arithmetische Mittel derselben.<sup>1)</sup>

Ich möchte meine Beobachtungen mittels folgender zwei Tabellen illustriren.

Tabelle VI.

Beobachtungen nach der Jamin'schen Methode.

Piezometer Nr. I; 16. IV. 1890;  $P=9,2306$ ;  $W=57756$  mm;  $t=18,60^\circ$  C.

Druck- vergrößerung $\theta_1$	Druck- verminderung $\theta_2$	Druck- vergrößerung $\gamma_1$	Druck- verminderung $\gamma_2$
50,85	50,85	12,40	12,40
50,90	50,90	12,30	12,30
50,90	50,70	12,90	12,40
50,89	50,70	12,45	12,30
50,90	50,80	12,45	12,41
Mittel 50,87	50,72	12,58	12,41

Tabelle VII.

Beobachtungen nach der Regnault'schen Methode.

Piezometer Nr. I; 8. IV. 1890;  $P=9,2400$ ;  $W=57756$  mm;  $t=17,34^\circ$  C.

Druck- vergrößerung $\theta_1'$	Druck- verminderung $\theta_2'$	Druck- vergrößerung $\theta_1''$	Druck- verminderung $\theta_2''$
47,45	47,70	3,20	2,90
47,60	47,60	3,05	3,00
47,40	47,50	3,05	3,00
47,50	47,50	3,10	2,90
47,40	47,40	3,00	3,00
Mittel 47,47	47,54	3,06	2,96

Man sieht also, dass die Angaben von  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ;  $\theta_1'$ ,  $\theta_2'$ ;  $\theta_1''$ ,  $\theta_2''$ ;  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  miteinander gut übereinstimmen und dass die bemerkbaren kleinen Unterschiede ganz durch die Beobachtungs-

1) In meiner früheren Abhandlung unterschied ich diese Fälle; vgl. p. 668—672.





Tabelle X.  
Die Endresultate berechnet nach den Mitteln der vorigen Tabelle.

Piezometer	1	2	3	4	5	6	7	8*	9	10	11	12	13	14	15	16
	T° C	P Atm.	$\theta'$ cmm	$\theta''$ cmm	$\theta$ cmm	$\theta' + \theta''$ cmm	$\gamma$ cmm	$\gamma_{(1/2, v_0)}$ cmm	$\gamma + \gamma_{(1/2, v_0)}$ cmm	Regnault		Jamin		deMetz		$\theta'$ $\gamma + \gamma_{(1/2, v_0)}$
										$\chi_a 10^7$	$\times 10^7$	$\chi_v 10^7$	$\chi_a 10^7$	$\chi_v 10^7$	$\chi_v 10^7$	
I	17,62	9,2109	12,4100	0,8002	13,3760	13,2400	12,3900	0,1885	12,579	15,042	22,759	37,801	14,958	37,718	39,582	0,991
II	20,42	9,1889	6,3564	0,6174	7,0201	6,9739	6,2863	0,0739	6,360	15,298	23,590	38,888	16,335	39,924	39,909	1,000
III	19,80	9,1760	6,2100	0,5277	6,7054	6,7377	5,9550	0,0869	6,042	12,996	24,479	37,475	16,333	40,812	36,777	1,028
IV	89,66	9,1784	3,7772	0,4292	4,2144	4,2064	3,6714	0,0417	3,713	14,123	24,523	38,646	17,240	41,768	39,782	1,019
M.	19,38									14,36	23,84	38,20	16,22	40,05	39,01	1,0095

Tabelle XI.  
Die Gesamtergebnisse aller Messungen bei 0° mit den Piezometern I und II.

Piezometer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
I	Atm.	$\theta'$	$\theta''$	$\theta$	$\theta' + \theta''$	$\gamma$	$\gamma_{(1/2, v_0)}$	$\gamma + \gamma_{(1/2, v_0)}$	$\chi_a 10^7$	$\times 10^7$	Regnault	Jamin	$\chi_v 10^7$	de Metz
		cmm	cmm	cmm	cmm	cmm	cmm	$\chi_a 10^7$						
III	9,2211	12,476	0,8021	—	13,2781	—	—	—	15,046	22,797	37,843	—	—	—
	9,2308	—	—	13,3423	—	12,3367	0,1887	12,525	—	—	—	15,324	38,123	—
	9,2308	—	—	13,3396	—	12,3617	0,1887	12,550	—	—	—	14,799	37,598	39,09
	9,1910	6,2119	0,4502	6,6916	6,6621	—	—	—	11,192	24,446	35,638	—	—	36,34
Mittel									13,12	23,62	36,75	15,06	37,86	37,71

Wir bekommen also aus der Tabelle  
Methode von

Regnault  $\chi_0 = 86,75 \times$

Jamin (corr.)  $\chi_0 = 87,86 \times$

De Metz  $\chi_0 = 87,71 \times$

und als Mittel nach allen Methoden

$$\chi_0 = 87,87 \times 10^{-7} \text{ bei}$$

Aus der Tabelle (X) erhält man bei  
Methode von

Regnault  $\chi_0 = 88,4$

Jamin (corr.)  $\chi_0 = 40,4$

De Metz  $\chi_0 = 89,4$

was als Mittel gibt

$$\chi_0 = 89,08 \text{ bei } 19,88^\circ$$

Folglich wächst die Quecksilbercompressi-  
peratur und der Coefficient dieser Zun-  
berechnet ist

$$\Delta\chi_0 = 87,7 \times 10^{-10},$$

so dass zwischen den Temperaturgrenzen  $\epsilon$   
die absolute Compressibilität des Quecksilber

$$(XI) \quad \chi_0 = 37,4 \times 10^{-7} + 87,7 \times$$

dargestellt wird, in welcher  $\epsilon$  die Tempera-  
bedeutet. Das letzte Resultat habe ich  
thermodynamischen Formel von A. Du-  
früher von Hrn. Amagat<sup>2)</sup> geprüft wu-  
Beobachtungen gut übereinstimmte. Die

$$\Delta = 10\,833(274 + \epsilon) \cdot \frac{\alpha}{\chi}$$

wenn  $\alpha$  den Coefficienten der thermisch  
Flüssigkeit,  $\chi_0$  den der absoluten Compres-  
die absolute Temperatur bedeutet. Was die  
au contact) anbetrifft, so stellt sie Dupré  
 $\alpha \Delta^2$ , in welchem  $\Delta$  das specifische Gew-  
sondere von der chemischen Natur des

1) A. Dupré, Théorie mécanique de la chal

2) Amagat, Ann. de chim. et de phys. (8





so müß  
weichen  
Welche  
seiner l  
der thet  
werden,  
Amaga  
Piesom  
stimmt  
Coeffici  
forderli

Obgleich  
doch ei  
kann:  
2. wenn  
des Que  
des Pie  
war, wi

1) '

2) .



welchem man die gusseisernen Vorrichtungen  $b$ ,  $c$  (Fig. 14) bewegen oder mittels der Schrauben festklemmen konnte. Die Vorrichtung  $b$  ist ausführlich auf der Fig. 15 dargestellt; sie bestand aus einem dicken gusseisernen rechtwinkligen Stück, welches mit der Schraube  $d$  an die Bank angeklammert werden konnte und trug ein Plättchen  $e$  mit der Schraube  $k$ . Dieses Plättchen war beweglich in drei rechtwinkligen Richtungen  $x, y, z$  (Fig. 17) und endete in einem prismatischen Messer, worauf das untersuchte Rohr lag. Der Theil  $c$  wurde besonders solid gemacht; er hatte eine Durchbohrung, in die eine Messinghülse  $V$  eingepasst war; dieselbe diente zum Einkitten des untersuchten Rohres und war mit dem Theile  $c$  fest zusammengeklammert. Der ganze Apparat war sehr kräftig gebaut, und während der Experimente bemerkte man weder Erschütterungen noch Verschiebungen.

19. Vermittels der Versuche über die Biegung und die Torsion der Piezometerröhre bestimmte ich bei Zimmertemperatur von  $15-17^{\circ}$  C. folgende Elasticitätsconstanten: den Young'schen Modul  $E$  und die Lamé'sche Constante  $\mu$ , deren Beziehung zu den Constanten  $\lambda$ ,  $\sigma$ ,  $\kappa$  durch die Gleichungen (1), (2), (3) gegeben ist.

Um den Modul  $E$  finden zu können, wurde das Rohr horizontal auf zwei gleichen Unterlagen  $b$ ,  $b$  freigelegt (in der Fig. 14 ist nur eine derselben gezeichnet; in diesem Falle functionirte der Theil  $c$  durchaus nicht) und mit zwei Messingringen  $m$ ,  $m$ , sowie mit einer Schale  $q$  für die Gewichtsstücke versehen. Die Ringe  $m$ ,  $m$  trugen zwei Spiegel  $r$ ,  $r'$  mit drei Schrauben zum Reguliren; diese Spiegel standen senkrecht zur Rohraxe und drehten sich in einer horizontalen Ebene.

Aus der Durchbohrung des Theiles  $c$  nahm man die Messinghülse  $V$  weg (Fig. 14), um eine in je 2 mm mit der Perreaux'schen Maschine eingetheilte Scala in der Ebene  $yz$  (Fig. 17) zu befestigen. In derselben Ebene wurden die beiden Spiegel einander gegenüber eingestellt, sodass ein Lichtstrahl, welcher von der Scala  $s$  (Fig. 16) zum Spiegel  $r'$  ging, sich in  $r'$  reflectirte, dann zum Spiegel  $r$  zurückging und nach der zweiten Reflexion endlich in das Fernrohr  $L$  traf. In diesem Verfahren der Winkelablesung bin ich Hrn. König<sup>1)</sup> gefolgt und es hat sich sehr

1) König, Wied. Ann. 28. p. 108. 1886.







indem man den Druck nicht in kgr pro qmm, sondern in Atmosphären ausdrückt.

Tabelle XV.

Kubische Compressibilität  $\kappa$  der Röhre und des Piezometers.

Nr.	n. d. Form. $\kappa = \frac{3(1-2\sigma)}{E}$	n. Regnault bei $\lambda = \mu$	Differenzen
I	$23,0 \times 10^{-7}$	$22,7 \times 10^{-7}$	$-0,3 \times 10^{-7}$
II	$21,6 \times 10^{-7}$	$23,6 \times 10^{-7}$	$+2,0 \times 10^{-7}$
III	$24,1 \times 10^{-7}$	$24,5 \times 10^{-7}$	$+0,4 \times 10^{-7}$
IV	$23,1 \times 10^{-7}$	$24,5 \times 10^{-7}$	$+1,4 \times 10^{-7}$
V	$23,3 \times 10^{-7}$	—	—

Wir können denselben Coefficienten  $\kappa$  noch rechnen mittels der Angaben von  $\sigma$  der Tabell Gleichung (V), in welcher  $\mu$  und  $\sigma$  aus der  $\lambda$  aber aus der Beziehung (3) entnommen sind; Weisse berechneten Coefficienten wollen wir kurz bezeichnen  $\kappa$  bei  $\lambda \neq \mu$ .

Tabelle XVI.

Kubische Compressibilität der Piezometer nach Regnault bei  $\lambda = \mu$  und bei  $\lambda \neq \mu$ .

Nr.	$\lambda = \mu$	$\lambda \neq \mu$	Differenzen
I	$22,7 \times 10^{-7}$	$24,1 \times 10^{-7}$	$+1,4 \times 10^{-7}$
II	$23,6 \times 15^{-7}$	$24,0 \times 10^{-7}$	$-0,4 \times 15^{-7}$
III	$24,5 \times 15^{-7}$	$25,8 \times 10^{-7}$	$+1,3 \times 15^{-7}$
IV	$24,5 \times 10^{-7}$	$25,3 \times 10^{-7}$	$+0,8 \times 15^{-7}$

Die Tabellen XV und XVI zeigen uns, dass die Coefficienten der kubischen Compressibilität der Piezometer — ob sie nach Regnault's Verfahren mit Lamé's vereinfachten Formeln, oder nach soeben beschriebener Methode mit genauen Formeln bestimmt werden — sich nicht mehr als auf eine Maximum zwei, Einheiten der siebenten Decimale unterscheiden. Eine grössere Uebereinstimmung ist kaum zu verlangen.

Um zu einem definitiven Schlusse zu gelangen, wollen wir eine Vergleichung machen von  $\kappa$  bestimmt nach Regnault. unter der Annahme  $\lambda = \mu$ . und  $\kappa$ , welches den Mittelwerth





die Schwankungen der Coefficienten  $\alpha$ , dem absoluten Werthe nach, vernachlässigt werden können, da in der That die mittleren Grenzen derselben sich zwischen  $\alpha = 22 \times 10^{-7}$  und  $\alpha = 28 \times 10^{-7}$  befinden, was wir durch folgende Zahlen veranschaulichen wollen.

Tabelle XIX.

Kubische Compressibilität des gewöhnlichen Glases und Bleiglasen.

Name	Bleiglas	$\alpha \cdot 10^7$	Name	Gewöhnliches deutsches Glas	$\alpha \cdot 10^7$
Wertheim <sup>1)</sup>	Baccarat . . . . .	28,2	Voigt <sup>9)</sup> . . .	Rheinisches . . .	24,6*
Wertheim <sup>2)</sup>	Choisi-le-Roi . .	26,0*	Kowalsky <sup>10)</sup>	Greiner & Friederichs . . . . .	25,3*
Grassi <sup>3)</sup> . .	Choisi-le-Roi . .	28,8*	De Metz . .	Gundelach . . . .	24,6
Everett <sup>4)</sup> . .	Cochran Flint Nr. II . . . . .	29,8*	De Metz . .	Greiner & Cie. . .	23,1
Everett <sup>5)</sup> . .	Couper Flint Nr. I . . . . .	24,9*			
Voigt <sup>6)</sup> . . .	Guinand à Paris . . . . .	27,5*			
Buchanan <sup>6)</sup>	Unbekanntes . . . . .	29,2			
Tait <sup>7)</sup> . . . .	Unbekanntes . . . . .	27,0			
Amagat <sup>8)</sup> . .	Guilbert Martin . . . . .	24,8			
De Metz . .	Französisches . . . . .	28,9			
		Mittel 27,4			Mittel 24,4

Name	Gewöhnliches franz. Glas	$\alpha \cdot 10^7$
Wertheim und Chévandier	Fensterglas von St. Quirin	19,5
	von Cirey . . . . .	22,0
	von Valéristhal . . . . .	22,4
Regnault <sup>11)</sup>	Unbekanntes . . . . .	23,7
Grassi <sup>12)</sup> . .	—	22,6
Amagat <sup>13)</sup> .	Guilbert Martin . . . . .	22,2
		Mittel 22,1

\* Die Zahlen, welche mit Asterisken bezeichnet sind, wurden von mir berechnet.

1) Regnault, l. c. p. 434.

2) Wertheim, Mémoire sur l'équilibre des corps solides homogènes. Extrait des Ann. de chim. et de phys. (3) 23. p. 21. 1848.

3) Grassi, l. c. Piezomètre A; berechnet bei der Annahme  $\lambda = \mu$

4) Everett, Phil. Trans. 158. p. 362. 1868.

5) Voigt, Wied. Ann. 15. p. 510—513. 1882.

6) Buchanan, Beibl. 5. p. 172. 1881.

7) Tait, Beibl. 14. p. 707. 1890.

8) Amagat, Journ. de phys. (2) 8. p. 362—365. 1889.

9) Voigt, l. c.

10) Kowalsky, Wied. Ann. 36. p. 309—313. 1889.

11) Regnault, l. c. p. 454—461.

12) Grassi, l. c. Piezomètres B et D.

13) Amagat, l. c. p. 362. 365.



wenn man einige nothwendige Correctionen anbringt. Daher berücksichtigte ich bei der Herstellung des Mittelwerthes der gegebenen Daten (vgl. die Tabelle XII) die Zahl der Piezometer, die bei den Experimenten angewendet wurden. Soviel mir bekannt ist, benutzten mehr als ein Piezometer nur Hr. Amagat (sieben) und ich (vier); unsere Vorgänger operirten jeder mit je einem Piezometer. Dieser Mittelwerth von  $\chi_0$  ist bei  $0^\circ$   $\chi_0 = 37.9 \times 10^{-7}$  und steht sehr nahe meiner Zahl  $\chi_0 = 37.4 \times 10^{-7}$  bei  $0^\circ$ .

Indem ich meine Arbeit schliesse, halte ich es für eine meiner angenehmsten Pflichten Hrn. Prof. Dr. Th. Schwedoff, in dessen Laboratorium dieselbe ausgeführt wurde, meinen innigsten Dank zu bezeugen.

Odessa, Phys. Labor. der Univ., im Juni 1892.

## XII. Die Fortpflanzung der Energie durch den Aether; von G. Helm.

Die Gleichungen, durch welche Hertz die Maxwell'sche Theorie ausgedrückt hat, lassen sich durch die *Bewegungsgleichungen eines den Raum stetig erfüllenden Mittels* ersetzen, dessen Volumenelemente in engen Grenzen affinveränderlich sind.

Nennt man nämlich  $u, v, w$  die Verschiebungscomponenten eines solchen Mittels im Orte  $x, y, z$  eines positiven Coordinatensystems, so bestimmen sich die Wirbelcomponenten  $\xi, \eta, \zeta$  daselbst durch die Gleichungen

$$(1a) \quad 2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

sodass

$$(2) \quad \frac{\partial 2\xi}{\partial x} + \frac{\partial 2\eta}{\partial y} + \frac{\partial 2\zeta}{\partial z} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$(1b) \quad \begin{cases} \frac{\partial 2\eta}{\partial z} - \frac{\partial 2\zeta}{\partial y} = \Delta u - \frac{\partial \sigma}{\partial x}, & \frac{\partial 2\zeta}{\partial x} - \frac{\partial 2\xi}{\partial z} = \Delta v - \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \\ \frac{\partial 2\xi}{\partial y} - \frac{\partial 2\eta}{\partial x} = \Delta w - \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \end{cases}$$

wo

$$(3) \quad \sigma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

die Dilatation des Volumenelementes am Orte  $xyz$ , eingeführt wurde, und  $\Delta$  die Operation  $\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$  anzeigt.

Es bewege sich nun jedes Volumenelement des Mittels nach den Gleichungen

$$(4) \quad \begin{cases} \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \kappa c^2 \Delta u + \kappa (C^2 - c^2) \frac{\partial \sigma}{\partial x} - k \frac{\partial u}{\partial t} + X_0 + X_1, \\ \kappa \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \kappa c^2 \Delta v + \kappa (C^2 - c^2) \frac{\partial \sigma}{\partial y} - k \frac{\partial v}{\partial t} + Y_0 + Y_1, \\ \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \kappa c^2 \Delta w + \kappa (C^2 - c^2) \frac{\partial \sigma}{\partial z} - k \frac{\partial w}{\partial t} + Z_0 + Z_1, \end{cases}$$

in Verbindung mit (4) schreiben:

$$(6a) \begin{cases} a \cdot 2\xi = A\mu \left( L + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \\ a \cdot 2\eta = A\mu \left( M + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \\ a \cdot 2\zeta = A\mu \left( N + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right), \end{cases} \quad (6b) \begin{cases} b c^2 \cdot 2\xi = L + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ b c^2 \cdot 2\eta = M + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ b c^2 \cdot 2\zeta = N + \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{cases}$$

$$(6c) \quad a u' = X + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad a v' = Y + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad a w' = Z + \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$(6d) \begin{cases} b u' = A\varepsilon \left( X + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \\ b v' = A\varepsilon \left( Y + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \\ b w' = A\varepsilon \left( Z + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right), \end{cases} \quad (6e) \begin{cases} b \frac{k}{x} u' = 4\pi\lambda A \left( X + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \\ b \frac{k}{x} v' = 4\pi\lambda A \left( Y + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \\ b \frac{k}{x} w' = 4\pi\lambda A \left( Z + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right), \end{cases}$$

$$(6f) \quad b \frac{1}{x} X_0 = 4\pi\lambda A X', \quad b \frac{1}{x} Y_0 = 4\pi\lambda A Y', \quad b \frac{1}{x} Z_0 = 4\pi\lambda A Z'.$$

Zu beachten ist nur, dass bei  $X', Y', Z'$  der Strich nicht wie sonst in diesem Aufsätze eine Differentiation anzeigt.

Setzt man in die mit dem Factor  $a$  multiplicirten Gleichungen (5a) und in die mit  $b$  multiplicirten Gleichungen (5b) diese Werthe, so erhält man die Hertz'schen Gleichungen

$$(7) \quad \begin{cases} A\mu \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, & A\epsilon \frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi\lambda A(X - X') = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}, \\ A\mu \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, & A\epsilon \frac{\partial Y}{\partial t} + 4\pi\lambda A(Y - Y') = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}, \\ A\mu \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}, & A\epsilon \frac{\partial Z}{\partial t} + 4\pi\lambda A(Z - Z') = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}, \end{cases}$$

wenn über die Functionen  $\varphi$  und  $\psi$  in folgender Weise verfügt wird:

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, & A\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} + 4\pi\lambda A(\varphi - \varphi_0) - bC^2\sigma = \Phi \cdot \frac{b}{ax} \\ aX_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, & aY_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, & aZ_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \end{cases}$$

Dabei bezeichnet  $\varphi_0$  eine Grösse, die sich innerhalb des von einem homogenen Körper erfüllten Volumens nicht ändert. Mit Hülfe von (2) und (3) folgen aus (6b) und (6c) noch die Beziehungen:

$$(9a) \quad \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = -\Delta\psi,$$

$$(9b) \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = -\Delta\varphi + a\sigma'.$$

Die Factoren  $a$  und  $b$  sind miteinander verknüpft durch

$$(10) \quad \frac{a}{b} = c^2 A\mu = \frac{1}{A\epsilon},$$

sodass die Wahl des einen willkürlich bleibt und von dem angewendeten Maasssystem abhängt. Auch gilt die Gleichung:

$$(11) \quad A^2\mu\epsilon = \frac{1}{c^2}.$$

Ferner sind unsere Constanten  $k$  und  $\kappa$  mit den Elektrizitätsconstanten  $\lambda$  und  $\epsilon$  verbunden durch die Gleichung:

$$(12) \quad \frac{k}{\kappa} = \frac{4\pi\lambda}{\epsilon}.$$

Endlich sei bemerkt, dass aus den Gleichungen (4) durch Differentiation und Addition die Beziehung folgt:

$$(13) \quad \begin{cases} \kappa\sigma'' = \kappa C^2 \Delta\sigma - k\sigma' + \frac{\partial}{\partial x}(X_0 + X_1) + \frac{\partial}{\partial y}(Y_0 + Y_1) \\ \quad + \frac{\partial}{\partial z}(Z_0 + Z_1) \end{cases}$$

und dass durch (10) und (12) der Wer

$$(8b) \quad \Phi = \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial t} + k(\varphi - \varphi_0).$$

Soll die Function  $\varphi$  wie bei Helmholtz das Potential bezeichnen, so ist nach (9b)

$$(14) \quad \sigma' = 0$$

die Bedingungen dafür, dass die Gleichung die Beschreibung derjenigen Erscheinungen darstellt, welche die Maxwell'sche Theorie für ruhende Körper in diesem Falle ziehen sich die Bedingungen (13) zusammen zu

$$\kappa \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} + k \Delta \varphi = -\kappa \left( \frac{\partial X_z}{\partial t} \right)$$

d. h. zur Continuitätsgleichung der elektrischen Ladung

$$(14b) \quad \frac{\partial}{\partial x} [k(X - X')] + \frac{\partial}{\partial y} [k(Y - Y')] + \frac{\partial}{\partial z} [k(Z - Z')] = 0$$

Die vorstehenden Entwicklungen sind hauptsächlich niedergelegt sind, sodass die Grenzbedingungen und der physikalischen eingeführten Grössen auf die Ausführung wiesen werden muss, beweisen, dass die Gleichungen (7) die Gleichungen (4) Bewegungsgleichungen eines elastisch festen Körpers ist, und in dem sich überall, wo Kräfte auf ihn einwirken, Transversal- und Longitudinalschwindigkeiten  $c$  und  $C$  ausbreiten können, wirken erstens an vereinzelten Stellen electromotorischen Kräfte galvanischen chemischen Ursprungs proportionalen  $\Delta \varphi$  in allen Volumenelementen die wesentlichen Potential abhängigen Kräfte  $X_1, Y_1, Z_1$ , allen als Leiter bezeichneten Raumgebieten Kräfte  $-k u', -k v', -k w'$ , zugesellen.

Die Gleichungen (4) vereinfachen die Beschreibung der elektrischen und magnetischen Vorgänge nicht un-

1) Hertz, Wied. Ann. 40 u. 41. 1890. "Die Ausbreitung der electrischen Kraft". p.













### **XIII. Zu „Ueber die Telephons**

Unter vor  
eine Abhandl  
Kritik eines A  
mann'sche M  
ten“<sup>2)</sup> enthält

Auf den  
zu erwidern:  
Verstehen  
durch die Gl

bedingt sei.<sup>3)</sup>  
Demgege  
chung lautet:

(A)

und dass hier  
schlecht defini  
Beobachter er  
empfohlenen  
veränderlich s

In seiner  
meine Beding

Aus sein  
nehmen, dass  
sichtigt habe,  
druck nicht g

---

1) Winke

2) Cohn,

3) Winke

ein Minimum, w  
Q aus erfahren“



1. Sei  $c_2 = 0$  gesetzt (mein früherer Ansatz), dann gehen (4), ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ) über in:

( $\gamma$ )  $c_1 = \text{const.}$ ,  $c_2 = \text{const.}$  (meine frühere Bedingung) und es kommt als einzige Forderung:

$$(A) \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \text{ (mein früheres Resultat)}$$

und zwar gleichviel, ob man den Fall a) oder b) vor sich hat.

2. Sei  $c_2$  von Null verschieden (genauerer Ansatz), und lasse man

a) für  $V$  und  $V_0$  willkürliche Aenderungen zu, so folgt:

$$c_1 = c_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2.$$

Wir wollen bemerken, dass es auch hier auf die  $\gamma$  ebensowohl ankommt, wie auf die  $c$ . Man wird aber diese Anordnung nicht wählen, weil man bei ihr im allgemeinen durch eine Einstellung das Gleichgewicht im Telephon nicht herstellen kann. Auch liegt sie weder bei Winkelmann vor, noch bei Gordon, sofern dessen Versuchsschema mit dem Winkelmann'schen vergleichbar sein soll und von mir verglichen ist.<sup>1)</sup>

Hier ist vielmehr

b) nur  $V$  willkürlich veränderlich,  $V_0$  dagegen constant. Dann folgt als einzige Bedingung:

$$(B) \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{\gamma_1 + \frac{1}{2}c_2}{\gamma_2 + \frac{1}{2}c_2}.$$

*Alles, was ich aus der Gleichung A geschlossen habe, folgt ebenso aus Gleichung B; nämlich die Nothwendigkeit, dafür zu sorgen, dass die  $\gamma$ , welche in die Messung eingehen, wohl-definirte und unveränderliche Grössen seien, — was sie bei Winkelmann's Anordnung nicht sind.*

Es tritt nur noch der Einfluss der Telephon-Capacität  $c$ , hinzu. Man könnte ihn in gleicher Weise, wie den der  $\gamma$ , constant und damit unschädlich machen, indem man auch das Telephon in eine metallische und mit den Platten  $\alpha$  und  $\epsilon$  (vgl. die Figur II. cc.) verbundene Hülle brächte. Aber die Gleichung B zeigt, dass man bequemer den Einfluss von  $c$ , unter jede beliebige vorgeschriebene Grenze drückt, indem man ein für allemal mit genügender Annäherung  $c_1 = c_2$  macht.

1) Vgl. Cohn, l. c. p. 137.





**XVI. Ueber Lösung von Natrium-Silikaten; insbesondere auch über einen Einfluss der Zeit auf deren Constitution; von F. Kohlrausch.**

aus den Gött. Nachrichten 1892 p. 443 mitgetheilt vom Hrn. Verfasser.)

Alkali, Kieselsäure und Wasser zusammen bilden ein Gebiet von ungewöhnlich grosser Mannigfaltigkeit, auf welchem noch vieles aufzuklären ist. Ich gebe einige aus dem electrischen Leitungsvermögen gewonnene Beiträge.

Eingehend untersucht habe ich das einfach gesättigte Salz  $\text{Na}_2\text{SiO}_3$  oder  $\text{Na}_2\text{O}, \text{SiO}_2$  und eine stark mit Kieselsäure übersättigte Lösung  $\text{Na}_2\text{O}, 8,4\text{SiO}_2$ ; ausserdem einige Mischungen beider miteinander und mit Aetznatron.

Die Lösungen des Polysilikates haben merkwürdige Eigenschaften chemischer Nachwirkung: erstens, wenn man eine concentrirte Lösung verdünnt, so vergeht eine lange Zeit, bis die verdünnte Lösung ein chemisches Gleichgewicht gewonnen hat; man kennt meines Wissens solche Fälle noch nicht. Zweitens, setzt man zu der verdünnten Lösung des Polysilikates Natronlauge, so verstreicht auch hier eine, je nach der seit dem Verdünnen verflossenen Zeit verschieden grosse Frist, bis die Stoffe ins Gleichgewicht kommen. Man hat mehrere ähnliche Erscheinungen in der organischen Chemie verfolgt, einige wenige in der unorganischen, aber diese beziehen sich auf zusammengesetztere Vorgänge.

An dem einfach gesättigten Salz ist von Interesse, dass dasselbe in verdünnter Lösung besser leitet, als alle anderen untersuchten Salze in äquivalenter Concentration, während es in concentrirter Lösung zu den schlechtest leitenden Salzen gehört.

Das übersättigte Salz leitet ebenfalls, aber nur in aller-äusserst verdünnter Lösung, relativ gut; es sinkt mit wachsender Concentration sehr rasch zu kleinen Werthen. Auffällig ist der grosse Einfluss der Temperatur auf das Leitvermögen verdünnter Lösungen, der alle anderen mir bekannten übertrifft.



Abcisse (Gött. Nachr. 1885, p. 16). Zum Vergleich sind einige andere Natriumsalze mitgezeichnet (vgl. ebd.).

In dieser Darstellung erscheint das moleculare Leitvermögen von  $\text{Na}_2\text{O}, \text{SiO}_2$  mit anfänglich sehr h Curve, ähnlich, wie für Electrolyte früher von gibt das übersättigte krümmte Curve, weld

liche Steilheit und die daran sich anschliessende Krümmung übertrifft diejenige für  $\text{MgSO}_4$  und ähnliche Körper erheblich. Der Ausgangspunkt der Curve liegt ebenfalls recht hoch.

Man wird diese Verhältnisse folgendermaassen zu deuten versucht sein. Von dem neutralen Salz würde man nach Analogie als Ionen wohl  $\text{Na}_2$  und  $\text{SiO}_2$  anzusehen haben. Für letzteres eine besonders grosse Beweglichkeit anzunehmen liegt kein Wahrscheinlichkeitsgrund vor. Wenn nun trotzdem bis gegen  $\alpha = 1$  verdünnte Lösungen besser leiten als alle übrigen Natriumsalze, so kann man vermuthen, dass hier  $\text{Na}_2\text{SiO}_2$  wie ein Gemisch von  $\text{NaOH}$  und Polysilikaten wirkt. Aehnliche







Versucht man die allmähliche Zersetzung des Polysilikates durch das Alkali, welche sich in den Aenderungen des Leitvermögens ausdrückt, in einer Formel darzustellen, so fügen sich die beiden ersten Reihen der einfachen Exponentialfunktionen mit einer den Verhältnissen genügenden Genauigkeit. Die erste Reihe nach dem Einbringen der concentrirten Polysilikatlösung wird dargestellt durch

$$x = 175 \cdot e^{-1.33t}$$

oder

$$-\frac{dx}{dt} = 1.33 \cdot x;$$

die zweite, welche nach dem Hinzufügen von Ammoniak zu der vor 1 Min. verdünnten Polysilikatlösung entstand, durch

$$x = 81 \cdot e^{-t}$$

oder

$$-\frac{dx}{dt} = x$$

Dies stimmt also mit der Abstand des Zustandes der Lösung einer Geschwindigkeit verschwindende diesem Abstande selbst  $x$  Aenderung des Zustandes durch die Aenderung des Leitvermögens gemessen wird.

Je längere Zeit aber seit der Verdünnung der Polysilikatlösung bis zur Mischung mit NaOH verflossen ist, desto weniger genügt die Exponentialfunction. Das Leitvermögen ändert sich in späteren Zeiten relativ zu langsam. Ja, die Curven für das Alter von 280 bis 1100 Min. zeigen in steigendem Maasse eine ganz geänderte Form. Zuerst fallen sie steil und stark gekrümmt ab, daran schliesst sich ein schwächer gekrümmter, bei 1100 Min von etwa  $t = 7$  bis  $t = 30$  Min. fast geradliniger Theil an und erst gegen den Schluss wieder eine Curve mit asymptotischem Abfall gegen den Endzustand.

Schlüsse werden hieraus vorläufig schwer gezogen werden können. Vielleicht hat man hier mehrere gleichzeitig verlaufende Vorgänge, die einerseits mit dem Alkali, andererseits mit dem Wasser zusammenhängen mögen. Man muss aber auch beachten, dass das Leitvermögen nach § 2 nicht immer einen eindeutigen Aufschluss über Alkali und Kieselsäure in Lösung





unterhalb deren die Kieselsäure noch das Leitvermögen ändert, nahe mit derjenigen zusammenfällt, unter welcher die Nachwirkungen ausbleiben. Füge man z. B. der Lösung von 1,9 Aeq.  $\text{SiO}_2$ , auf welche sich die Tabelle bezieht, nach Herstellung des Gleichgewichtszustandes weiteres Natron hinzu, so stellte sich sofort ein neues, constantes Leitvermögen her.

Strassburg, Juli 1892.

---



sicht der Resultate meiner sämtlichen Versuche enthält, scheint Hr. K. Exner nicht gekannt zu haben.

Meine zahlreichen Versuche über das Verhalten des polarisirten Lichtes, welches an Beugungsgittern reflectirt worden ist, habe ich im Einzelnen bisher nicht veröffentlicht, da die Resultate sehr complicirt sind. Aber die Gesamtheit meiner Versuche über die Beugung des linear polarisirten Lichtes, im durchgehenden und reflectirten Lichte, zeigt, dass das gebeugte Licht im allgemeinen elliptisch polarisirt ist; dass das Amplitudenverhältniss und der Phasenunterschied der Componenten,  $\mp$  und  $\perp$  zur Beugungsebene polarisirt, mit Form, Abstand und Substanz der Gitterstäbe sich ändert; mit wachsender Wellenlänge und mit wachsendem Beugungswinkel zu- und abnimmt und dass dieser periodische Wechsel sich mehrfach wiederholen kann.

Im allgemeinen habe ich meine Versuche weder mit dem Stokes'schen Cosinusgesetze, noch mit den theoretischen Betrachtungen von J. Fröhlich u. a., die nach 1873 veröffentlicht worden sind, in Uebereinstimmung gefunden.

Heidelberg, den 15. October 1892.

## **XVI. Sichtbare Darstellung der *aequipotentialen* Linien in durchströmten Platten; Erklärung des Hall'schen Phänomens; von E. Lommel.**

Vorläufige Notiz.

Eine einfache Ueberlegung zeigt, dass die zu den Stromlinien in einer Platte senkrechten Aequipotentiallinien zugleich die zu der Strömung gehörigen magnetischen Kraftlinien sind. Streut man Eisenfeilspäne auf die Platte, so ordnen sich dieselben bei genügender Stromstärke zu einem schönen Bilde der Aequipotentiallinien.

Bringt man die Platte in ein Magnetfeld, so ändern diese Magnetkraftlinien ihre Lage, und damit auch die zu ihnen nothwendig orthogonal bleibenden Stromlinien. Darin liegt die einfache Erklärung des Hall'schen Phänomens.

München, 6. Nov. 1892.













W. Wien. Ueber die Messung hoher Temperaturen . . . . .	521
Sitzung vom 17. Juni 1892.	
H. W. Vogel. Ueber die neue Methode der vervielfältigenden Photographie in Naturfarben . . . . .	521
A. König. Ein neues Spectralphotometer . . . . .	527
H. E. J. G. du Bois demonstirt mehrere neuere Constructionen	527
A. Raps demonstirt ein gemeinsam mit Hrn. A. Rubens con- struirtes grosses Spectrometer . . . . .	528
Sitzung vom 8. April 1892.	
O. Lummer. 1. Ein neues Spectralphotometer, nach gemeinsam mit Hrn. E. Brodhun ausgeführten Versuchen. Mit Demonstrationen. 2. Einiges zur Abbildung nicht selbstleuchtender Objecte . .	337
Sitzung vom 6. Mai 1892.	
Th. Gross. Ueber den Satz von der Entropie . . . . .	339
Sitzung vom 20. Mai 1892.	
F. Neesen. Ueber die Mitnahme von Losscheiben durch rasch umlaufende Axen . . . . .	346
W. Wien. Ueber die Bewegung der Kraftlinien im electro- magnetischen Felde . . . . .	353

#### Band 47.

Sitzung vom 21. October 1892.	
W. Jäger und D. Kreichgauer. Ueber den Temperaturcoefficienten des Quecksilbers . . . . .	767
L. Arons. Ueber einen Quecksilberlichtbogen . . . . .	767



Edelmann, M. Th., Foucault'sches Pendel 45, 187.

Ellinger, H. O. G., Brechungsindex elektrischer Strahlen in Wasser 46, 513.

Elster, J., u. H. Geitel, Licht-electrische Versuche 46, 281. — Wasserfallelectricität 47, 496.

Englisch, Eug., Galvanische Leitungsfähigkeit eines Wismuth-Blei-Amalgams 45, 591.

### F.

Fromme, C., Magnetische Experimentaluntersuchungen 45, 798.

### G.

Galitzine, B., strahlende Energie 47, 479. — Dichtigkeit gesättigter Dämpfe und Ausdehnung von Flüssigkeiten 47, 466.

Geitel, H., s. Elster.

Gieseler, Eb., Turbine und Drehwaage zu Vorlesungsversuchen. 46, 383.

Glan, P., Phasenänderung des Lichtes durch Reflexion 47, 252.

Goldhammer, D. A., Kerr'sches magnetooptisches Phänomen und magnetische Circularpolarisation 46, 71. — Electrodynamik der Leiter 46, 99. — Dispersion und Absorption des Lichtes nach der elektrischen Lichttheorie 47, 93. — Elektrische Lichttheorie 47, 265. — Elektrische Theorie der magneto-optischen Erscheinungen 47, 345.

Graetz, L., Wärmeleitung der Gase 45, 298.

### H.

Hallwachs, W., Brechungsexponenten verdünnter Lösungen 47, 380.

Helm, G., Fortpflanzung der Energie durch den Aether 47, 743.

v. Helmholtz, H., Princip der kleinsten Wirkung in der Electrodynamik 47, 1.

Henrichsen, S., Magnetismus organischer Verbindungen 45, 38.

Hertz, H., Durchgang der Kathodenstrahlen durch dünne Metallschichten 45, 28.

Holborn, L., u. W. Wien, Messung hoher Temperaturen 47, 107.

### K.

Kalischer, S., Stromverzweigung in linearen Leitern 46, 113.

Kayser, H., u. C. Runge, Spectra von Kupfer, Silber und Gold 46, 225.

Ketteler, E., Grenzbrechungsexponent für unendlich lange Wellen 46, 572.

Klemenčič, Ignaz, Reflexion von Strahlen elektrischer Kraft an Schwefel- und Metallplatten 45, 62. — Selbstinductions - Coefficient einer Drahtrolle 46, 315.

Koch, K. R., u. A. Wüllner, Galvanische Polarisation an kleinen Electroden 45, 475. 759.

Kohlrausch, F., Leitfähigkeit von Lösungen von Natriumsilikaten; Einfluss der Zeit 47, 756.

Koláček, F., Doppelbrechung in inductiver Darstellung 47, 258.

Kreichgauer, D., u. W. Jaeger, Temperaturcoefficient des elektrischen Widerstandes von Quecksilber; Quecksilberwiderstände der Reichsanstalt 47, 513.

Krone, H., Farbenphotogramme von Spectren 46, 426.

Kümmell, G., Abscheidung von Niederschlägen an der Grenze von Electrolyten 46, 105.

Kummer, G., Erschütterungsströme 46, 119.

Kurlbaum, F., s. O. Lummer.

### L.

Lebedew, P., Abstossende Kraft strahlender Körper 45, 292.

Lehmann, O., Entladungspotentialgefälle 47, 426.

Lenard, Ph., Electricität der Wasserfälle 46, 584. — Phosphoroskop mit Funkenlicht 46, 637.

v. Lepel, F., Oxydation des Stickstoffs durch Funken 46, 319.

Lindeck, St., Manganin 46, 515.

Lohnstein, R., Durchgang schwacher Ströme durch Electrolytzellen 47, 299.





Fig. 8.

7000  
6500  
6000  
5500  
5000  
4500  
4000  
3500  
3000  
2500  
2000  
1500  
1000  
+ 500  
0  
- 500

Thermoelektrische Kraft von Element A in Mikrovolt →





**Fig. 2.**

**Taf. II.**

*(rothes Licht)*

Lith. Anst. v. C. Kist. Leipzig



Anna

Fig. 1.

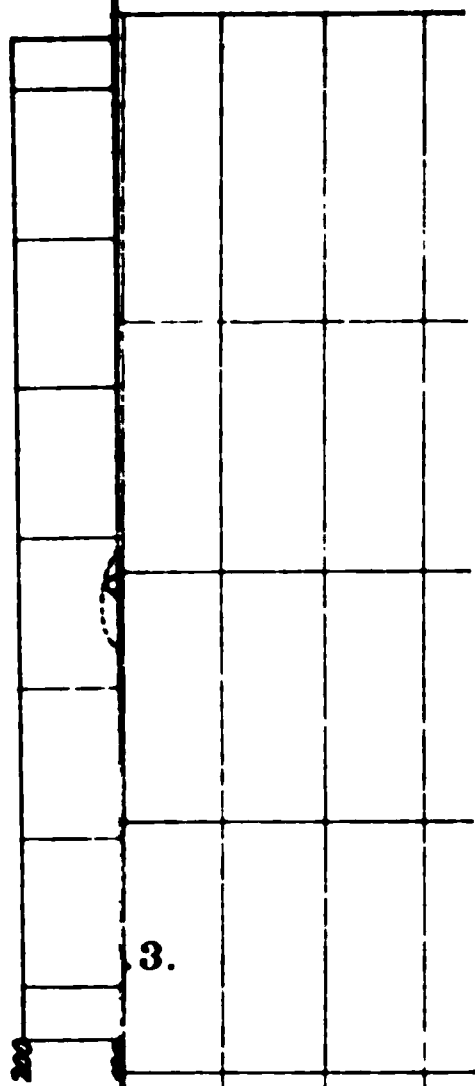
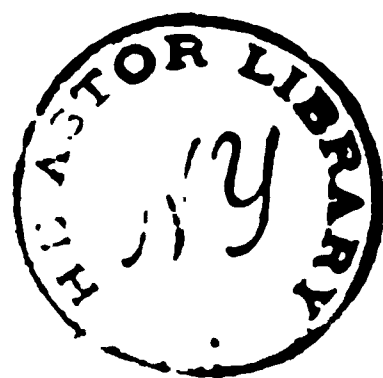
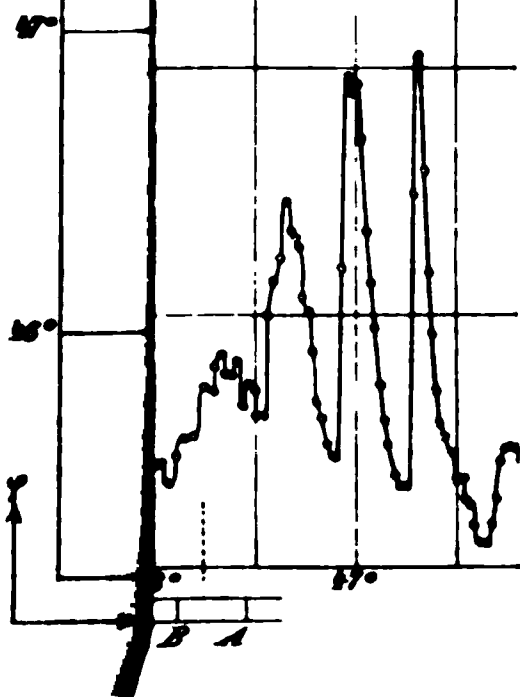
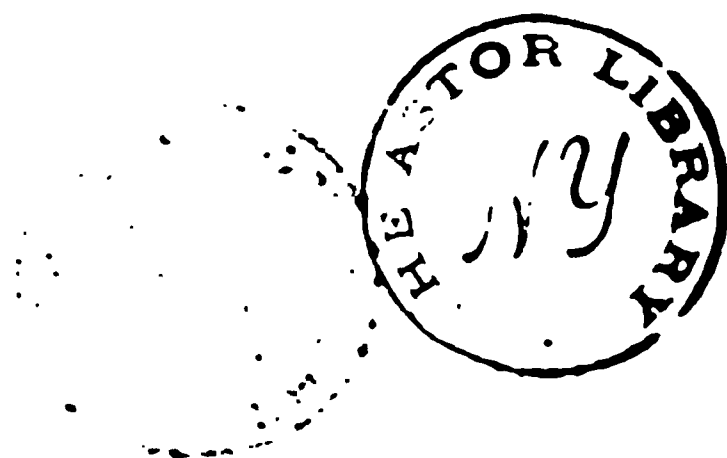
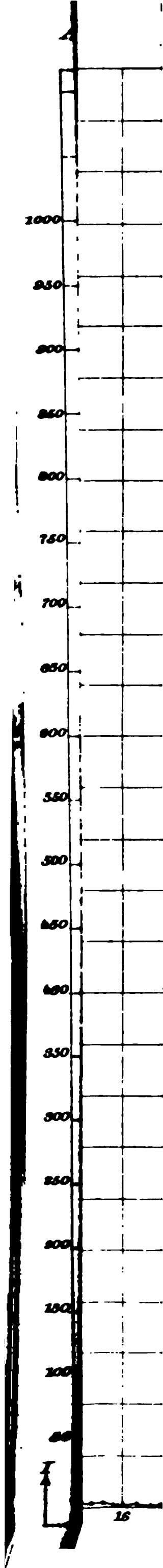


Fig. 2.

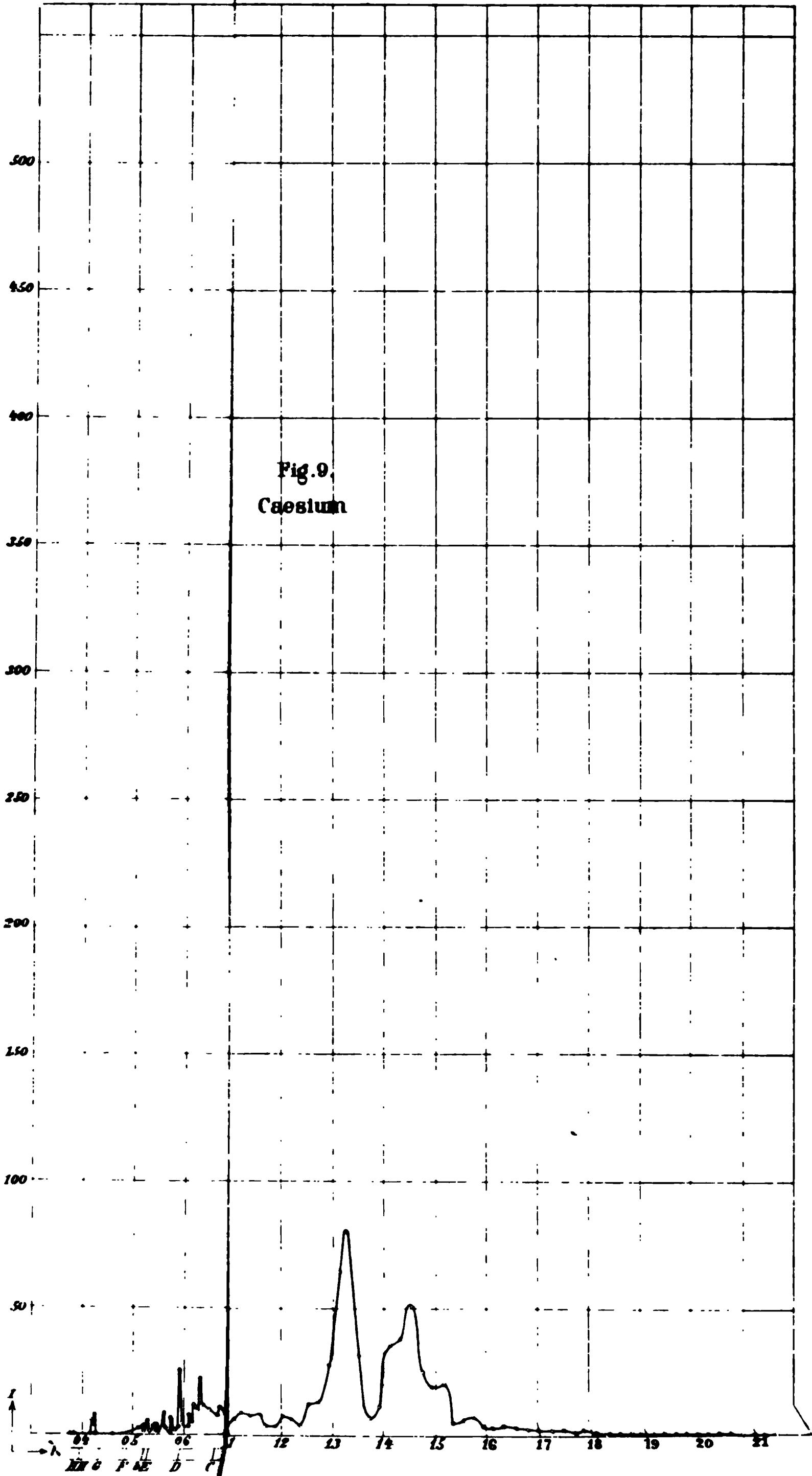




1897







FOR





1





Fig. 19.

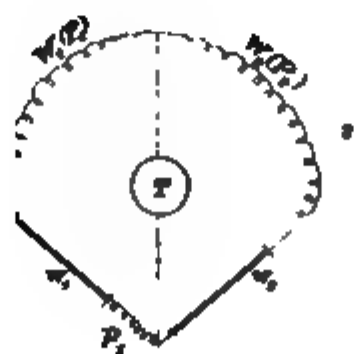


Fig. 7.

